СИСТЕМЫ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ КАК ОРБИТЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП*

М. Н. Истомина — istomina@syktsu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

12 декабря 2009 г.

Данный доклад непосредственно примыкает к докладу [1].

1°. Напомним [2, 3], что набор единичных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ из $\mathbb{R}^n$ называется *системой Мерседес-Бенц*, если

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\tfrac{1}{n} \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{1}$$

Из определения следует, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i = \mathbb{O}. \tag{2}$$

Действительно,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i \Big\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i, \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle =$$
$$= n + 1 + n\big(n+1\big)\big(-\tfrac{1}{n}\big) = 0.$$

Система Мерседес-Бенц является жёстким фреймом, поэтому для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо разложение

$$x = \tfrac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i \,. \tag{3}$$

Каждая система Мерседес-Бенц получается из канонического фрейма Мерседес-Бенц $\{b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ с помощью ортогонального преобразования. Для канонического фрейма в [1] установлено циклическое свойство. Мы покажем, что аналогичным свойством обладают все системы Мерседес-Бенц.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

ТЕОРЕМА. *Для любой системы Мерседес-Бенц* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *найдётся ортогональная матрица* P *порядка* n, *такая, что*

1) $P\varphi_i = \varphi_{i+1}$, $i \in 1:n$; $P\varphi_{n+1} = \varphi_1$;

2) $P^{n+1} = I$, *где* I *— единичная матрица* n*-го порядка;*

3) единица не является собственным числом матрицы P.

Доказательство. Свойства 1) и 2) выводятся так же, как в [1].

1) В силу (1) системы единичных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, где $\psi_i = \varphi_{i+1}$, удовлетворяют условию

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \psi_i, \psi_j \rangle \quad \text{при всех} \quad i, j \in 1:n.$$

В этом случае, как показано в [3, Приложение], существует ортогональная матрица P, такая, что

$$\psi_i = P\varphi_i, \qquad i \in 1:n.$$

Это значит, что

$$\varphi_{i+1} = P\varphi_i, \qquad i \in 1:n. \tag{4}$$

Далее, согласно (2), $\varphi_{n+1} = -(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)$. Учитывая (4), приходим к равенству

$$P\varphi_{n+1} = -\big(\varphi_2 + \cdots + \varphi_{n+1}\big) = \varphi_1\,.$$

2) Имеем $\varphi_k = P^{k-1}\varphi_1$ при $k \in 1:n+1$. При тех же k

$$P^{n+1}\varphi_k = P^k\big(P^{n+1-k}\varphi_k\big) = P^k\big(P^n\varphi_1\big) = P^k\varphi_{n+1} = \\ = P^{k-1}\varphi_1 = \varphi_k.$$

На основании (3) получаем

$$P^{n+1}x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что $P^{n+1} = I$.

3) Допустим, вопреки утверждению, что существует ненулевой вектор x_0, такой, что $Px_0 = x_0$. Введём матрицу

$$Q = I + P + P^2 + \cdots + P^n.$$

Имеем

$$Qx_0 = (n+1)\,x_0 \neq \mathbb{O}. \tag{5}$$

Вместе с тем, согласно 2), $QP = Q$. Значит, и $QP^{k-1} = Q$ при $k \in 1 : n+1$. В силу 1) и (2) при тех же k

$$Q\varphi_k = QP^{k-1}\varphi_1 = Q\varphi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{n+1} = \mathbb{O}.$$

На основании (3) получаем

$$Q\,x = \mathbb{O} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что Q — нулевая матрица. В частности, $Qx_0 = \mathbb{O}$, что противоречит (5).

Теорема доказана. □

2°. Множество матриц $G = \{I, P, P^2, \ldots, P^n\}$ образует группу по умножению. Действительно, $P^k P^s = P^l$, где $l = \langle k+s \rangle_{n+1}$. Умножение ассоциативно, то есть $(P^k P^s)P^r = P^k(P^s P^r)$. Это связано с тем, что

$$\langle \langle k+s \rangle_{n+1} + r \rangle_{n+1} = \langle k+s+r \rangle_{n+1} = \langle k + \langle s+r \rangle_{n+1} \rangle_{n+1}.$$

Единицей в группе G является единичная матрица I. Обратные элементы определяются так:

$$I^{-1} = I; \qquad (P^k)^{-1} = P^{n+1-k}, \quad k \in 1 : n.$$

Свойство 2) характеризует группу G как циклическую.

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ множество векторов $\{Tx\}_{T \in G}$ называется *орбитой* группы G. При $x = \varphi_1$ орбита состоит из векторов

$$\big\{\varphi_1, P\varphi_1, \ldots, P^n\varphi_1\big\} = \big\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}\big\},$$

то есть при $x = \varphi_1$ орбитой группы G является система Мерседес-Бенц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 сентября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0912`).

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0116`).

3. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. Вып. 39. 2009. С. 3–25.