СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

2 октября 2010 г.

1. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из основных аппаратов прикладной математики, который активно применяется в физике, различных областях техники, цифровой обработке информации и других сферах [1]. В математической литературе предлагается трактовка дискретного преобразования Фурье как метода приближённого вычисления преобразования Фурье по точкам отсчёта функции [2]. Будем рассматривать ДПФ как унитарное преобразование в конечномерном пространстве.

Матрица ДПФ порядка n имеет вид [3, с. 197] (нумерация элементов матрицы начинается с нуля)

$$DPF = \left(q^{kl}\right)_{k,l=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 & \dots & q^{n-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & \dots & q^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q^{n-1} & q^{2n-2} & q^{3n-3} & \dots & q^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где в качестве q берут $\exp(2\pi i/n)$ или $\exp(-2\pi i/n)$. В одном из этих случаев перед матрицей ставится множитель $\frac{1}{n}$. При этом одно из преобразований

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/5568

вида (1) называют прямым ДПФ (обычно при $q = \exp(-2\pi i/n)$ [3]), а другое обратным ДПФ.

Вместо (1) применим симметричную форму записи, определив *унитарную матрицу ДПФ* (за основное взяли обратное в терминах [3] ДПФ)

$$F = F_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\, DPF, \quad \text{где} \;\; q = e^{\frac{2\pi i}{n}}. \tag{2}$$

Комплексно-сопряжённая матрица определяет обратный и сопряжённый оператор $\overline{F} = F^{-1} = F^*$.

В технических приложениях применение прямого ДПФ к вектору (входному сигналу) $x = (x_0\, x_1\, \ldots\, x_{n-1})^T$ (векторы записываем в виде матрицы-столбца) позволяет получить набор спектральных коэффициентов (выходной сигнал) $c = (c_0\, c_1\, \ldots\, c_{n-1})^T$, что в прикладных дисциплинах объявляется как представление спектра.

Следуя математической терминологии, *спектральное разложение* линейного оператора в конечномерном пространстве связываем с вычислением всех собственных чисел и собственных векторов оператора. Линейная оболочка всех собственных векторов, отвечающих фиксированному собственному числу, составляет собственное подпространство. Поэтому спектральным разложением унитарного оператора считаем представление оператора через разложение исходного пространства в виде прямой суммы взаимноортогональных собственных подпространств.

2. Операторы кручения четвёртого порядка

ЛЕММА 1. *При $n > 2$ оператор F_n является периодическим, а именно, оператором кручения четвёртого порядка: $F^4 = I$.*

Доказательство. Из (1) и (2) вытекает, что обратная и прямая матрицы ДПФ связаны формулой $F^* = GF = FG$ через пермутатор (матрицу перестановки строк или столбцов)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Подставим эту формулу в условие унитарности оператора $FF^* = I$ и получим $F^2G = I$, $F^2 = G$. Так как $G^2 = I$, то $F^4 = I$. □

Известно [4, с. 316], что оператор преобразования Фурье в $L_2(-\infty, +\infty)$ также является унитарным оператором кручения четвёртого порядка с собственными числами 1, i, -1, $-i$ и функциями Эрмита в качестве собственных функций.

Также унитарными операторами кручения четвёртого порядка в $L_2[0, \infty)$ являются оператор мультипликативного преобразования Фурье [5] и оператор Λ-мультипликативного преобразования Фурье [6]. В [5] приведено доказательство следующей леммы, которая в ином виде встречается и в [4].

ЛЕММА 2. *Пусть $F\colon X \to X$ есть унитарный оператор кручения четвёртого порядка. Тогда операторы*

$$Q_k = \tfrac{1}{4}\bigl(I + i^k F + (i^k F)^2 + (i^k F)^3\bigr),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$, являются ортопроекторами на собственные подпространства R_k, то есть

$$X = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3, \quad R_l \perp R_j \ \text{при}\ l \neq j, \quad FQ_k = (-i)^k Q_k.$$

При доказательстве проверяем, что введённые операторы *идемпотентные* ($Q_k^2 = Q_k$), действительные и симметричные ($Q_k^T = Q_k$), и заключаем на основании [4, с. 286], что Q_k есть ортопроекторы. Также непосредственно проверяются условия ортогональности ($Q_l\, Q_j = 0$ при $l \neq j$) и инвариантности ($FQ_k = \lambda_k\, Q_k$, где $\lambda_k = (-i)^k$).

Для *ортогонального* (действительного унитарного) оператора верно аналогичное утверждение [5].

ЛЕММА 3. *Пусть $S\colon X \to X$ есть ортогональный оператор кручения второго порядка. Тогда операторы $Q_k = \frac{1}{2}\bigl(I + (-1)^k S\bigr)$, где $k = 0, 1$, являются ортопроекторами на собственные подпространства R_k, то есть*

$$X = R_0 \oplus R_1, \qquad R_0 \perp R_1, \qquad SQ_k = (-1)^k Q_k\,.$$

В конечномерном (нашем) случае $X = \mathbb{R}^n$ или $X = \mathbb{C}^n$.

Из леммы 2 вытекает спектральное разложение оператора ДПФ:

$$F = F\bigl(Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3\bigr) = Q_0 - i\,Q_1 - Q_2 + i\,Q_3 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k\, Q_k\,, \tag{4}$$

которое согласно спектральной теореме для унитарных операторов [7, с. 180] выражается через единичные ортопроекторы P_j:

$$F = \sum_{j=1}^{n_0} P_j - i \sum_{s=1}^{n_1} P_{n_0+s} - \sum_{s=1}^{n_2} P_{n_0+n_1+s} + i \sum_{s=1}^{n_3} P_{n_0+n_1+n_2+s}\,,$$

где $n_k = \dim R_k$, $n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$.

Сумма всех единичных ортопроекторов представляет собой *разложение единицы* [7, с. 134]: $I = \sum_{j=1}^{n} P_j$.

С каждым разложением единицы связан ортонормированный базис $\{f_j\}$. Полагаем в нашем случае, что базис $\{f_j\}$ представлен в виде n-мерных столбцов. Тогда $P_j = f_j\, f_j^*$ для каждого j. По построению P_j след каждого единичного ортопроектора равен норме образующего элемента

$$\operatorname{Tr} P_j = f_j^* f_j = \|f_j\|^2 = \|f_j\| = 1.$$

Так как произвольный ортопроектор есть сумма единичных, то получаем следующее правило вычисления размерности n_k собственных подпространств R_k.

ЛЕММА 4. *След матрицы ортопроектора на конечномерное подпространство равен размерности подпространства. В частности, для каждого собственного подпространства*

$$\operatorname{Tr} Q_k = \dim R_k = n_k.$$

Унитарная матрица U, которую составим из столбцов базиса f_j, позволяет диагонализировать матрицу F: $U^* F\, U = D$. Так как ортопроекторы Q_k действительные, то и матрицу U можно выбрать действительную (то есть ортогональную).

3. Спектр дискретного преобразования Фурье

Введём обозначение $\sigma(F_n)$ для *спектра* оператора ДПФ, то есть для набора собственных чисел с учётом их кратности. Вычислив корни характеристического многочлена $p(\lambda) = |F - \lambda I|$, найдем

$$\sigma(F_2) = \{1, -1\}, \quad \sigma(F_3) = \{1, -1, i\}, \quad \sigma(F_4) = \{1, 1, -1, i\}.$$

Спектр очередного ДПФ получается из спектра предыдущего ДПФ присоединением к набору одного числа: $\sigma(F_3) = \sigma(F_2) \sqcup \{i\}$, $\sigma(F_4) = \sigma(F_3) \sqcup \{1\}$.

Напомним обозначения $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$.

ТЕОРЕМА ([8, 9]). *Спектр матрицы $F = F_n$ дискретного преобразования Фурье вычисляется по рекуррентной формуле*

$$\sigma(F_{4m+k}) = \sigma(F_{4m+k-1}) \sqcup \lambda_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

присоединением к спектру предыдущего ДПФ очередного собственного числа. Алгебраическая кратность n_k каждого собственного числа λ_k равна его геометрической кратности, то есть матрица F диагонализируема. В частности, $n_0 = \lfloor n/4 \rfloor + 1$, $n_1 = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$, $n_2 = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$, $n_3 = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$ (применён знак целой части числа).

Ортопроекторами на собственные ортогональные подпространства R_k размерности n_k служат операторы $(k = 0, 1, 2, 3)$

$$Q_k = \tfrac{1}{4}\bigl(I + i^k F + (i^k F)^2 + (i^k F)^3\bigr),$$

то есть $\mathbb{C}^n = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ (или $\mathbb{R}^n = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$), $R_l \perp R_j$ при $l \neq j$, $Q_k x = x$ и $Fx = \lambda_k x$ для любого $x \in R_k$.

Для справедливости теоремы осталось вычислить значения n_0, n_1, n_2 и n_3.

Используя (3), вычислим след проекторов P_+ и P_- на действительное $R_0 \oplus$ $\oplus\, R_2$ и мнимое $R_1 \oplus R_3$ инвариантные подпространства отдельно

$$\operatorname{Tr} P_+ = \operatorname{Tr}\bigl(Q_0 + Q_2\bigr) = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}\bigl(I + F^2\bigr) = \bigl\lfloor \tfrac{n+2}{2} \bigr\rfloor, \tag{5}$$

$$\operatorname{Tr} P_- = \operatorname{Tr}\bigl(Q_1 + Q_3\bigr) = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}\bigl(I - F^2\bigr) = n - \bigl\lfloor \tfrac{n+2}{2} \bigr\rfloor. \tag{6}$$

Используя (1), вычислим (как действительную и мнимую часть суммы)

$$\operatorname{Tr}\bigl(Q_0 - Q_2\bigr) = \operatorname{Tr} \tfrac{1}{2}\bigl(F + F^3\bigr) = \operatorname{Tr}\bigl(\operatorname{Re} F\bigr) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\bigl(q^{k^2}\bigr), \tag{7}$$

$$\operatorname{Tr}\bigl(Q_3 - Q_1\bigr) = \operatorname{Tr} \tfrac{-i}{2}\bigl(F - F^3\bigr) = \operatorname{Tr}\bigl(\operatorname{Im} F\bigr) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\bigl(q^{k^2}\bigr). \tag{8}$$

В правой части формул (7) и (8) присутствует *сумма Гаусса*, модуль которой вычисляется в [10, с. 81]. Оригинальное вычисление (результат которого в следующем утверждении) суммы Гаусса, предложенное Дирихле, приводится в [11, с. 446].

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}} = \frac{i^n + 1}{i^n + i^{n-1}}\,.$$

Данное утверждение перепишем в виде

$$\operatorname{Tr}\bigl(Q_0 - Q_2\bigr) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \tag{9}$$

$$\operatorname{Tr}\bigl(Q_3 - Q_1\bigr) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 2 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{10}$$

Из (5) и (9) вытекает $\operatorname{Tr} Q_0 = k + 1$, так как для $n = 4k + j$

$$\tfrac{1}{2}\bigl(\operatorname{Tr}(Q_0 + Q_2) + \operatorname{Tr}(Q_0 - Q_2)\bigr) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\bigl((2k+1) + 1\bigr), & \text{если } j \in \{0, 1\}, \\ \tfrac{1}{2}\bigl((2k+2) + 0\bigr), & \text{если } j \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Из (6) и (10) вытекает

$$\operatorname{Tr} Q_1 = \tfrac{1}{2}\bigl(\operatorname{Tr}(Q_1+Q_3) - \operatorname{Tr}(Q_3-Q_1)\bigr) = \begin{cases} k-1, & \text{если } n = 4k, \\ k, & \text{если } n = 4k+j,\ j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\operatorname{Tr} Q_2 = \operatorname{Tr} P_+ - \operatorname{Tr} Q_0 = \begin{cases} k, & \text{если } n = 4k \ \text{ или } \ n = 4k+1, \\ k+1, & \text{если } n = 4k+2 \ \text{ или } \ n = 4k+3; \end{cases}$$

$$\operatorname{Tr} Q_3 = \operatorname{Tr} P_- - \operatorname{Tr} Q_1 = \begin{cases} k, & \text{если } n = 4k+j, \quad j \in \{0,1,2\}, \\ k+1, & \text{если } n = 4k+3. \end{cases}$$

4. Построение базисов собственных подпространств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Линейная оболочка столбцов матрицы Q_k совпадает с собственным пространством R_k.*

Доказательство. Пусть $\{f_j\}_{j=1}^{n_k}$ есть ортонормированный базис собственного пространства R_k, записанный в виде столбцов. Тогда

$$Q_k = \sum_{j=1}^{n_k} P_j = \sum_{j=1}^{n_k} f_j\, f_j^*$$

есть сумма единичных проекторов. Это означает, что каждый столбец матрицы Q_k есть линейная комбинация столбцов f_j. Значит, линейная оболочка столбцов матрицы Q_k является подпространством пространства R_k ($span(Q_k) \subset R_k$).

Равенство $Q_k\, f_j = \lambda_k\, f_j$ означает, что любой элемент базиса (столбец в правой части равенства) линейно выражается через столбцы матрицы Q_k. Установили противоположное включение $R_k \subset span(Q_k)$. □

Предложим способ построения базиса пространства R_k выделением из матрицы Q_k линейно независимых столбцов. Методом ортогонализации Грама-Шмидта [4, с. 87] этот базис пространства R_k превращается в ортонормированный. Предложим метод матричной ортогонализации, который эквивалентен методу Грама-Шмидта и объединяет оба указанных приёма.

Пронормируем и возьмём в качестве f_1 любой столбец матрицы Q_k. Построим единичный проектор $P_1 = f_1\, f_1^T$. Спроектируем все остальные столбцы матрицы Q_k на ортогональное дополнение к f_1. Для этого применим проектор P_1 к (каждому) столбцу и вычтем из него полученный результат. Для набора полученных столбцов повторяем все шаги описанной процедуры вычисления: выбираем f_2, строим $P_2 = f_2\, f_2^T$ и проектируем на дополнение к f_2. И так далее. В процессе выполнения данного алгоритма возникают нулевые столбцы, которые исключаем из дальнейшего рассмотрения. Тем самым попутно вычисляется ранг матрицы Q_k.

Приведём примеры вычислений, полученных этим методом. Результат вычислений оформим в виде ортогональной матрицы U.

Пусть $n = 4$. Тогда (при $q = i$) матрица

$$F = F_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_0 = 1$ — кратности 2, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$. Ортопроекторами на инвариантные подпространства служат (Q_0 — проектор на двумерное подпространство)

$$Q_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad Q_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Из проектора Q_0 выделяем

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

строим единичный проектор

$$P_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}9 & 3 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

проектируем

$$P_1\, q_2 = P_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\, f_1$$

и вычитаем

$$q_2 - \frac{1}{3} f_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После нормировки имеем

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а векторы

$$f_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

получаем из проекторов Q_2, Q_3.

Итак,

$$I = Q_0 + Q_2 + Q_3, \qquad F = F_4 = Q_0 - Q_2 + iQ_3\,.$$

Ортонормированный базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, записанный по столбцам, даёт ортогональную матрицу

$$U = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 1 & -2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Ортогональным преобразованием с этой ортогональной матрицей матрица ДПФ приводится к диагональному виду:

$$U^T F U = \mathrm{diag}(1, 1, -1, i).$$

Пусть $n = 5$. Ортогональная матрица из собственных векторов, вычисленная описанным выше способом, имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2k & 0 & -2l & 0 & 0 \\ l & 1 & k & s & t \\ l & -1 & k & t & -s \\ 1 & -1 & k & -t & s \\ l & 1 & k & -s & -t \end{pmatrix},$$

где

$$k=\frac{2\sin(2\pi/5)}{\sqrt5}=\frac{\sqrt{5+\sqrt5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt2}{\sqrt{5-\sqrt5}}\,,$$
$$l=\frac{2\sin(4\pi/5)}{\sqrt5}=\frac{\sqrt{5-\sqrt5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt2}{\sqrt{5+\sqrt5}}\,,$$
$$s=\sqrt{1+k},\qquad t=\sqrt{1-k}.$$

Получаем

$$U^T F\,U=\operatorname{diag}(1,1,-1,i,-i),\qquad U^T F^2\,U=\operatorname{diag}\bigl(1,1,1,-1,-1\bigr).$$

При $n=6$ ортогональная матрица из собственных векторов имеет вид

$$U=\begin{pmatrix}\sqrt5\,c & 0 & -\sqrt5\,d & 0 & 0 & 0\\ d & d+x & c & y-c & a & b\\ d & -x & c & -y & b & -a\\ d & -2d & c & 2c & 0 & 0\\ d & -x & c & -y & -b & a\\ d & d+x & c & y-c & -a & -b\end{pmatrix},$$

где

$$a=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2\sqrt2}\,,\quad b=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2\sqrt2}\,,\quad c=\frac{\sqrt{6+\sqrt6}}{\sqrt{60}}\,,\quad d=\frac{\sqrt{6-\sqrt6}}{\sqrt{60}}\,,$$
$$x=\sqrt{3/2}\,d,\quad y=\sqrt{3/2}\,c.$$

При этом

$$U^T F\,U=\operatorname{diag}(1,1,-1,-1,i,-i).$$

При $n=8$ ортогональная матрица из собственных векторов имеет вид

$$U=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{6} & \frac{\sqrt6}{6} & a & -b & -\frac12 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\sqrt6}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{4} & \frac{\sqrt2}{4} & \frac12 & \frac{\sqrt2}{4}\\ 0 & 0 & b & a & 0 & \frac12 & 0 & -\frac12\\ -\frac{\sqrt6}{12} & \frac{\sqrt3}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{4} & -\frac{\sqrt2}{4} & \frac12 & -\frac{\sqrt2}{4}\\ -\frac{\sqrt3}{6} & -\frac{\sqrt6}{6} & a & -b & \frac12 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt6}{12} & \frac{\sqrt3}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{4} & \frac{\sqrt2}{4} & -\frac12 & \frac{\sqrt2}{4}\\ 0 & 0 & b & a & 0 & -\frac12 & 0 & \frac12\\ \frac{\sqrt6}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{4} & -\frac{\sqrt2}{4} & -\frac12 & -\frac{\sqrt2}{4}\end{pmatrix}$$

с теми же a, b. При этом

$$U^T F U = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1, -1, i, i, -i).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Залманзон Л. А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях.* М.: Наука, 1989. 496 с.

2. *Математическая энциклопедия.* Т. 5. М.: Сов. энцикл. 1984. 1248 с.

3. Ефимов А. В. *Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение.* М.: Высшая школа, 1980. 279 с.

4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональноиу анализу.* М.: Мир, 1979. 588 с.

5. Беспалов М. С. *Операторы мультипликативного преобразования Фурье* // Изв. ВУЗОВ. Сер. мат. 2006. Т. 526. № 3. С. 9–23.

6. Ефимов А. В., Поспелов А. С., Умняшкин С. В. *Некоторые свойства мультипликативных систем, используемые в цифровой обработке сигналов* // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 137–182.

7. Глазман И. М., Любич Ю. И. *Конечномерный линейный анализ.* М.: Наука, 1969. 476 с.

8. McClellan J. H., Parks T. W. *Eigenvalues and eigenvectors of the discrete Fourier transformation* // IEEE Trans. Audio Electroacoust. 1972. V. 20. No. 1. P. 66–74.

9. Dickinson B. W., Steiglitz K. *Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform* // IEEE Trans. Acoust., Speech and Sig. Processing. 1982. V. 30. No. 1. P. 25–31.

10. Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* М.: Наука, 1972. 168 с.

11. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. *Лекции по математическому анализу.* М.: Дрофа, 2004. 640 с.