СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

8 октября 2011 г.

Доклад существенно опирается на доклад В. Н. Малозёмова [1], где приведены базовые сведения. Чтобы не повторять определения и формулы из этого доклада, ссылки на пронумерованные формулы доклада [1] оформим двойным индексом: укажем (1.2) при ссылке на формулу (2) из доклада [1].

1°. Формула (1.1) служит определением *дискретной функции Уолша в нумерации Адамара* уровня s, обозначенной v_k. Вектор значений $v_k(j)$ (где $j \in 0 : N-1$, $N = 2^s$) дискретной функции Уолша в нумерации Адамара уровня s будем обозначать тем же символом v_k или подробнее символом $v_k\{s\}$ (с указанием уровня) и называть *вектором дфу* или вектором дфу-Адамара.

Основной нумерацией дискретных функций Уолша считается нумерация, предложенная Пэли [2]. В пунктах 8–10 доклада [1] эта нумерация вводится через перестановку reverse двоичного кода по формуле (1.17). Вектор значений дискретной функции Уолша в нумерации Пэли уровня s будем обозначать w_k или $w_k\{s\}$ (с указанием уровня), называть *вектор дфу-Пэли* и определять через вектор дфу-Адамара $w_k = v_{\mathrm{rev}_s(k)}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *При любом фиксированном s всего различных векторов дфу уровня s ровно 2^s.*

Различные векторы дфу фиксированного уровня s имеют разное число перемен знака.

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доклад подготовлен при поддержке РФФИ, проект 11-01-97512 р-центр-а.

Если взять за основу определение (1.1) или (1.2), то доказательство данного утверждения заняло бы лишнюю страницу доклада. Ниже вводится определение 1, из которого вытекает данное утверждение.

Третьей традиционной нумерацией дискретных функций Уолша служит *нумерация Уолша*, при которой функции упорядочены по числу перемен знака векторов дфу. Будем обозначать *векторы дфу-Уолша* символом u_k.

В статье [3] вводится ещё одна нумерация векторов-дфу. Соответствующие векторы обозначим b_k.

2°. Предложим определение векторов дфу, не привязанное к нумерации.

Напомним [4, с. 331], что *кронекерово произведение матриц* $C=(c_{ij})_{i,j=0}^{n-1,m-1}$ и B есть блочная матрица вида

$$C \otimes B = (c_{ij} \cdot B)_{i,j=0}^{n-1,m-1}.$$

Введём матрицы $S = (1\ 1)$, $A = (1\ -1)$ (смысловая нагрузка символов: S — симметричный, A — антисимметричный).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектором значений дискретной функции Уолша уровня s (вектором дфу уровня s) назовём любое кронекерово произведение векторов S и A в количестве s сомножителей.

ПРИМЕР 1. Построим по определению 1 векторы дфу уровня 2 и приведём их обозначение в нумерациях Пэли, Адамара, Уолша и в новой [3]:

$$\begin{aligned}
S \otimes S &= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) = w_0 = v_0 = u_0 = b_0,\\
A \otimes S &= (1 \quad 1 \ -1 \ -1) = w_1 = v_2 = u_1 = b_3,\\
S \otimes A &= (1 \ -1 \quad 1 \ -1) = w_2 = v_1 = u_3 = b_2,\\
A \otimes A &= (1 \ -1 \ -1 \quad 1) = w_3 = v_3 = u_2 = b_1.
\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Векторы дфу в нумерации Адамара упорядочены в лексикографическом порядке в алфавите* $\{S, A\}$*, где символ* $\otimes$ *считаем разделительным знаком.*

Доказательство. В примере 1 построена база индукции. Сделаем индуктивный переход. Согласно формуле (1.2) при $0 \leqslant k < 2^{\nu-1}$ имеем

$$v_k\{\nu\} = S \otimes v_k\{\nu-1\}, \qquad v_{k+2^{\nu-1}}\{\nu\} = A \otimes v_k\{\nu-1\}. \qquad \square$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Векторы дфу в нумерации Пэли упорядочены в лексикографическом обратном порядке в алфавите* $\{S, A\}$.

Доказательство проводится аналогично.

Если мы каждый символ S заменим на 0, а символ A заменим на 1, опустив символы $\otimes$, то по определению 1 получим номер вектора дфу-Адамара в двоичной системе счисления. При прочтении этого выражения в обратном порядке получим номер дискретной функции Уолша в нумерации Пэли.

3°. С помощью векторов дфу фиксированного уровня можно строить дискретные преобразования Уолша (DWT — Discrete Walsh Transform) различных нумераций. Формула (1.2) служит определением матрицы DWT в нумерации Адамара, которую будем обозначать (в отличии от [1]) символом H_ν (от написания Hadamard), так как символ A занят.

Матрицу DWT в нумерации Пэли будем обозначать W_ν. Обычно [5] её определяют как матрицу, соответствующие строки которой есть вектор значений функции Уолша в нумерации Пэли на последовательных по $k \in 0 : 2^\nu - 1$ интервалах ν-го ранга $\Delta_\nu^k = [\frac{k}{2^\nu}, \frac{k+1}{2^\nu})$.

Матрицу DWT-Уолша U_ν определим как матрицу, в которой строки упорядочены по числу перемен знака.

Пусть матрица R есть перестановочная матрица с единицами на побочной диагонали, у которой все остальные элементы 0. С помощью этой матрицы легко задать перестановку строк произвольной матрицы C в обратном порядке $C_{\text{rev}} = R \cdot C$ (реверс строк) и перестановку столбцов в обратном порядке $C^{\text{rev}} = C \cdot R$ (реверс столбцов). В [3] предложена нумерация матриц DWT по аналогии с (1.2):

$$B_\nu = \begin{bmatrix} B_{\nu-1} & RB_{\nu-1} \\ B_{\nu-1}R & -RB_{\nu-1}R \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Перечисленные матрицы DWT: H_ν, W_ν, U_ν, B_ν — принадлежат также классу нормализованных матриц Адамара, которым посвящена глава 14 в книге [6]. Все эти матрицы, а также и другие матрицы этого класса, получаются перестановкой строк матрицы W_ν, не затрагивающей начальной строки. Этим методом кроме матриц H_2, W_2, U_2, B_2 можно построить ещё две матрицы DWT уровня 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

В отличии от матриц H_2, W_2, U_2, B_2 матрицы (2) несимметричные. Но матрицы (2) связаны друг с другом операцией транспонирования, поэтому и столбцы этих матриц тоже суть векторы дфу.

4°. Для матриц DWT более высокого уровня метод построения новых матриц DWT перестановкой строк нормализованной матрицы Адамара H_ν нельзя считать удачным.

ПРИМЕР 2. Если переставить местами две последние строки любой из матриц H_3, W_3, U_3, B_3, то не все столбцы преобразованной матрицы являются векторами дфу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть V есть матрица, полученная перестановкой строк матрицы DWT уровня s. Тогда*

$$V^T \cdot V = V \cdot V^T = 2^s \; E^{(s)},$$

где E — единичная матрица второго порядка, $E^{(s)}$ — её кронекерова степень, а потому есть единичная матрица порядка 2^s.

Доказательство. Так как столбцы транспонированной матрицы совпадают со строками исходной, то согласно ортогональности векторов дфу, установленной в предложении 2 доклада [1], приходим к утверждению $V \cdot V^T = 2^s \; E^{(s)}$. Учитывая совпадающий порядок трёх матриц, выводим $V^T \cdot V = V \cdot V^T$. $\square$

Принцип цифровой обработки сигнала (ЦОС) на примере дискретного преобразования Уолша произвольной нумерации следующий. Исходный дискретный сигнал x длины $N = 2^s$ преобразуем в сигнал $y = Vx$ и передаем его по каналу связи. Получатель точно восстанавливает исходный сигнал по формуле $x = \frac{1}{N} V^T y$.

Для того чтобы вычисления при реализации *оператора синтеза* V и *оператора анализа* V^T осуществлялись в классе дискретных функций Уолша, введём следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовём W-матрицей такую матрицу, все строки и столбцы которой есть различные векторы дфу.

В книге [7] была поставлена задача описания класса возможных дискретных преобразований Уолша, решением которой служат W-матрицы. Ранее считалось [7], что удобным для ЦОС оператором дискретного преобразования Уолша является оператор с симметричной матрицей DWT. Поэтому в [7] решается (параграф 2.8), но к сожалению неверно, задача вычисления количества симметричных матриц дискретных преобразований Уолша. Ошибка была вызвана, в частности, тем, что не было выработано правильное определение множества матриц дискретных преобразований Уолша.

Пример 2 показывает, что не все перестановки строк матрицы DWT приводят к W-матрице. Будем считать, что лишь W-матрицы задают оператор дискретного преобразования Уолша произвольной нумерации.

5°. Сформулируем принцип построения W-матриц, который эквивалентен предложенному в статье [8], но по-другому изложен.

ЛЕММА 1. *Произвольный вектор дфу уровня s однозначно определяется своими координатами с номерами, указанными в выборке* $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в [4], кронекерово произведение ассоциативно. Поэтому любой вектор дфу $w\{s\} = (a_0\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{N-1})$ представляется в виде $w\{s\} = u\{k\} \otimes v\{s-k\}$, отделением первых k сомножителей от последних $s-k$. (Применяем обозначения w, u, v для векторов дфу без уточнения их вида.) Опираемся на то, что первая координата любого вектора дфу равна 1.

Если $s - k = 1$, то $w\{s\} = u\{s-1\} \otimes S$, и в этом случае $a_1 = 1$; или же $w\{s\} = u\{s-1\} \otimes A$ и в этом случае $a_1 = -1$.

Имеем $w\{s\} = u\{s-j-1\} \otimes S \otimes v\{j\}$ или $w\{s\} = u\{s-j-1\} \otimes A \otimes v\{j\}$ в общем случае. Первые 2^{j+1} координат представляют вектор $S \otimes v\{j\}$ или $A \otimes v\{j\}$ соответственно. В первом варианте $a_{2^j} = 1$, а во втором варианте $a_{2^j} = -1$. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *В результате перекодировки по правилу* $1 \to 0$, $-1 \to 1$ *координат подвектора, выделенного выборкой* $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$ *из вектора дфу* $w\{s\}$*, получаем двоичный код номера этого вектора дфу* $w\{s\}$ *в нумерации Пэли.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор $(a_{2^{s-1}} \ldots a_4\ a_2\ a_1)$ из записи вектора дфу по определению 1 получается заменой $S \to 1$, $A \to -1$ и удалением разделительных значков $\otimes$. Для получения подвектора $(a_1\ a_2\ a_4 \ldots a_{2^{s-1}})$ вектора дфу дополнительно применяем операцию обращения координат (reverse). Сравнивая с предложениями 1 и 2, получаем следствие 1. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём кодирующей матрицей для W-матрицы её подматрицу K, строчки и столбцы которой выделены выборкой $\{1, 2, \ldots, 2^{s-1}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Каждая* W*-матрица однозначно определяется своей кодирующей матрицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Восстановим все строчки предложенной W-матрицы V с номерами, указанными в выборке $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$.

По j-й строке ($j \in 0 : s-1$) кодирующей матрицы K согласно лемме 1 восстанавливается строка с номером 2^j матрицы V перекодировкой $1 \to S$, $-1 \to A$ и расстановкой разделительных значков $\otimes$. Далее вычисляем кратное кронекерово произведение.

В результате этого окажутся вычисленными координаты с номерами $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$ всех столбцов матрицы V. Повторяем метод восстановления, применённый для строк с номерами $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}\}$, для всех столбцов матрицы V. □

Итак, в строках кодирующей матрицы K указаны закодированные (раскодировка $1 \to 0$, $-1 \to 1$) номера в нумерации Пэли *образующих строк* W-матрицы.

Аналогично, в столбцах кодирующей матрицы K указаны закодированные номера *образующих столбцов* W-матрицы.

ПРИМЕР 3. Четыре строки примера 1 в указанном порядке составляют матрицу W_2. Кодирующей для неё служит средняя часть (матрица второго порядка), у которой на главной диагонали стоят 1, а на побочной стоят -1. После перекодировки получим булеву матрицу с единицами только на побочной диагонали, в которой записаны номера в последовательности 1,2 (сверху вниз и слева направо в двоичной системе счисления). Поэтому *код матрицы* W_2 есть (1 2), что обозначим $W_2 \sim (1\ 2)$.

Аналогично получаем $H_2 \sim (2\ 1)$, $U_2 \sim (1\ 3)$, $B_2 \sim (3\ 2)$.

6°. Рассмотрим симметричные W-матрицы V. Легко устанавливается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *W-матрица симметрична тогда и только тогда, когда симметрична её кодирующая матрица.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Собственными числами симметричной W-матрицы уровня s являются $\lambda_1 = \sqrt{N}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{N}$, где $N = 2^s$.*

Собственными векторами, отвечающими числу λ_1, являются все столбцы матрицы $(V + \sqrt{N}E^{(s)})$, а собственными векторами, отвечающими числу λ_2, являются все столбцы матрицы $(V - \sqrt{N}E^{(s)})$.

Доказательство. По предложению 3 имеем $V^2 = N\,E^{(s)}$, что перепишем в виде

$$(V - \sqrt{N}E^{(s)})(V + \sqrt{N}E^{(s)}) = 0. \tag{3}$$

□

ТЕОРЕМА 1. *Размерность собственных подпространств R_+ (отвечает собственному числу $\lambda_1 > 0$) и R_- (отвечает собственному числу λ_2) W-матрицы V уровня s совпадает и равна $\frac{N}{2}$, если на главной диагонали её кодирующей матрицы K встречается -1.*

Если же все элементы главной диагонали кодирующей матрицы K есть 1, то $\dim R_+ = \frac{1}{2}(N + \sqrt{N})$, $\dim R_- = \frac{1}{2}(N - \sqrt{N})$.

Доказательство теоремы приведено в [8]. Частный случай для традиционных нумераций установил Буа [9]: в случае нумераций Адамара и Уолша, а также в случае нечётного уровня для нумерации Пэли, $\dim R_+ = \dim R_-$; для матрицы DWT в нумерации Пэли чётного уровня $\dim R_+ = \frac{1}{2}(N + \sqrt{N})$, $\dim R_- = \frac{1}{2}(N - \sqrt{N})$.

В пункте 10 будет приведена другая форма записи сомножителей формулы (3), приводящая к проекторам на собственные подпространства.

7°. Интерес представляют не просто собственные векторы, а базисы собственных подпространств R_+ и R_-.

ТЕОРЕМА 2. *Если в качестве матрицы V возьмём H_s или B_s, то начальные $\frac{N}{2} = 2^{s-1}$ столбцов матриц $(V + \sqrt{N}E^{(s)})$ и $(V - \sqrt{N}E^{(s)})$ образуют базис пространства, состоящий из собственных векторов.*

Доказательство. Рассмотрим случай нумерации Адамара. Воспользовавшись представлением матрицы H_s по формуле (1.2), представим

$$H_s - \lambda\, E^{(s)} = \begin{bmatrix} H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)} & H_{s-1} \\ H_{s-1} & -H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)} \end{bmatrix},$$

где в качестве λ берём $\lambda_1 = \sqrt{N}$ или $\lambda_2 = -\sqrt{N}$.

Вычислим обратную матрицу к начальному блоку. Заметим, что

$$(H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)})(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)}) = H_{s-1}^2 - \lambda^2\, E^{(s-1)} = (2^{s-1} - 2^s)E^{(s-1)}.$$

Значит,

$$(H_{s-1} - \lambda\, E^{(s-1)})^{-1} = -2^{1-s}(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)}).$$

Представлением Шура для отдельного блока блочной матрицы $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ называется $S = D - CA^{-1}B$. В [10, с. 61] отмечено, что блок A служит базисным минором блочной матрицы тогда и только тогда, когда $S = 0$.

В нашем случае

$$CA^{-1}B = H_{s-1}\big(-2^{1-s}(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)})\big)H_{s-1} = -(H_{s-1} + \lambda\, E^{(s-1)}).$$

Значит $\frac{N}{2}$ столбцов левой половины матрицы $H_s - \lambda\, E^{(s)}$ составляют базис пространства R_+ или R_- соответственно.

Для случая нумерации, предложенной Беспаловым [3], доказательство аналогично (опирается на формулу (1) вместо формулы (1.2)). Оно приведено в [8]. □

В случае нумераций Пэли и Уолша базисные столбцы по-другому располагаются в матрицах $(V + \sqrt{N}E^{(s)})$ и $(V - \sqrt{N}E^{(s)})$. Даже формулировка результата в этих случаях довольно громоздкая. Базисы из собственных векторов можно выделить, применяя представление Шура, что и продемонстрировано в статье [11]. Например, для матрицы DWT-Пэли чётного уровня $s = 2m$ столбцы матриц сомножителей формулы (3) разобьём на 2^m последовательных групп по 2^m столбцов в группе. Из каждой очередной группы в базис включаем на один столбец меньше, чем из предыдущей группы. Для матрицы $W + \sqrt{N}E$ начинаем с выбора всех столбцов группы, а для $W - \sqrt{N}E$

начинаем с выбора всех столбцов без последнего. Внутри группы организуется реверсный порядок столбцов.

В случае нечётного s избавиться от радикалов в записи собственных векторов нельзя, а потому этот случай менее интересен для практики.

8°. Изучим наиболее интересный случай нумерации Пэли чётного уровня.

Термин "уровень s" для векторов длины 2^s перенесём с векторов дфу на другие векторы. В частности, будем применять обозначение $e_k\{s\}$ для k-го вектора стандартного базиса (одна единица в качестве k-й координаты, остальные нули) пространства $\mathbb{R}^N$, где $N = 2^s$, $k \in 0 : N-1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^N$ при $N = 2^s$, где s чётное, $s = 2m$, составляет система векторов*

$$\big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\}\big\}_{k,l=0}^{2^m-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Система векторов $\{e_k\{m\}\}_{k=0}^{2^m-1}$ составляет ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{N_1}$, где $N_1 = 2^m$. По предложению 2 из [1] система векторов $\{w_l\{m\}\}_{l=0}^{2^m-1}$ составляет ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^{N_1}$. Для векторов фиксированной длины скалярное произведение кронекеровых произведений равно произведению скалярных произведений

$$\langle u \otimes v, w \otimes t\rangle = \langle u, w\rangle \cdot \langle v, t\rangle, \tag{5}$$

что и доказывает предложение. □

В случае чётного уровня $s = 2m$ *дискретное преобразование Уолша* вектора $x \in \mathbb{R}^N$ (в виде столбца) и формулу (1.13) его обращения можно записать в симметричном виде без радикалов:

$$X = \frac{1}{N_1} W_s \cdot x, \qquad x = \frac{1}{N_1} W_s \cdot X.$$

В этом виде матрица $\frac{1}{N_1} W_s$ относится к классу *унитарных матриц*, которые в действительном случае (как у нас) называют *ортогональными матрицами*.

Векторы базиса (4) будем считать записанными в виде столбцов, чтобы действие оператора выражалось в виде обычного произведения матриц (как и в выносных формулах выше).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Ортогональное дискретное преобразовввание Уолша в нумерации Пэли уровня $s = 2m$ преобразует векторы базиса* (4) *по правилу*

$$\frac{1}{N_1} W_s \Big(e_k\{m\} \otimes w_l\{m\}\Big) = e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу W_s порядка N_1^2 в виде блочной квадратной матрицы порядка N_1 с квадратными блоками порядка N_1. Строка с номером $r = lN_1 + k$, где $k, l \in 0 : N_1 - 1$, согласно предложению 2 имеет вид

$$w_r\{s\} = w_k\{m\} \otimes w_l\{m\}$$

и располагается в l-й блочной строке блочной матрицы под k-м номером в блоке. Будем применять оператор W_s к столбцу $e_{k_1}\{m\} \otimes w_{l_1}\{m\}$ построчно, вычисляя координаты (спектральные характеристики) сигнала на выходе. На основании формулы (5)

$$\langle w_k\{m\} \otimes w_l\{m\}, e_{k_1}\{m\} \otimes w_{l_1}\{m\}\rangle = \langle w_k\{m\}, e_{k_1}\{m\}\rangle \cdot \langle w_l\{m\}, w_{l_1}\{m\}\rangle.$$

Согласно ортогональности (предложение 2 из [1]) $\langle w_l\{m\}, w_{l_1}\{m\}\rangle = 2^m$, если $l = l_1$, и $\langle w_l\{m\}, w_{l_1}\{m\}\rangle = 0$, если $l \neq l_1$. Поэтому сигнал на выходе преобразования $\frac{1}{N_1} W_s\Big(e_{k_1}\{m\} \otimes w_{l_1}\{m\}\Big)$ будет иметь вид $e_{l_1}\{m\} \otimes a\{m\}$ (только строки l_1-й блочной строки при умножении дадут ± 1).

Вид вектора $a\{m\}$ далее ищем без указания уровня m (его зафиксируем). Координаты вектора $a = (a_0\ a_1 \ldots a_{N_1-1})^T$ согласно формуле $\langle w_k\{m\}, e_{k_1}\{m\}\rangle$, вычисляются как k_1-е координаты векторов w_k (а это и есть значение k-й дискретной функции Уолша в нумерации Пэли на аргументе k_1; как следствие симметричности дискретного преобразования Уолша-Пэли, номер функции и значение аргумента можно поменять местами):

$$a_k = w_k(k_1) = w_{k_1}(k).$$

Доказали, что $a = w_{k_1}$. □

Приведено новое, отличное от данного в [8], доказательство предложения.

ТЕОРЕМА 3. *Ортогональным базисом из собственных векторов дискретного преобразования Уолша-Пэли чётного уровня $s = 2m$ является:*

$$\Big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} - e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\Big\}_{0 \leqslant k < l \leqslant 2^m - 1}$$

для собственного подпространства R_-;

$$\Big\{e_k\{m\} \otimes w_k\{m\}\Big\}_{k=0}^{2^m-1} \cup \Big\{e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} + e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\Big\}_{0 \leqslant k < l \leqslant 2^m - 1}$$

для собственного подпространства R_+.

Доказательство. Все векторы базиса (4) имеют одинаковую норму. Поэтому замена любых двух из них на сумму и разность сохраняет свойство базисности. По предложению 8 проверяем, что полученные векторы будут собственными, и вычисляем собственные числа:

$$W_s\Big(e_k\{m\} \otimes w_l\{m\} \pm e_l\{m\} \otimes w_k\{m\}\Big) = \lambda_1(e_l\{m\} \otimes w_k\{m\} \pm e_k\{m\} \otimes w_l\{m\}).$$

□

9°. Получим принцип выделения собственных подпространств дискретных преобразований Уолша произвольной нумерации.

ТЕОРЕМА 4 (о спектральном разложении оператора)**.** *Для унитарного* ($J^{-1} = J^*$) *периодического* ($J^m = Id$) *оператора* $J : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ *(или в другом евклидовом пространстве) ортопроекторы на собственные подпространства* R_k*, где* $k \in 0 : m-1$*, вычисляются по формуле дискретного преобразования Фурье (ДПФ) от степеней оператора*

$$Q_k = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{kl} \, J^l, \qquad \text{где } \omega_m = \exp\bigl(\frac{2\pi i}{m}\bigr). \tag{6}$$

Посредством обратного ДПФ восстанавливаются степени оператора

$$J^l = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{-kl} \, Q_k. \tag{7}$$

Доказательство. Проверим ортогональность операторов (6) (при обозначении $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{m})$). Суммируя по диагоналям квадрата, получаем

$$Q_k \, Q_r = \frac{1}{m^2} \sum_{l=0}^{m-1} \omega^{kl} \, J^l \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{jr} \, J^j = \frac{1}{m^2} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{kl+jr} \, J^{l+j} =$$

$$= \frac{1}{m^2} \Bigl(\sum_{s=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} \omega^{sr+kj-jr} J^s + \sum_{t=m}^{2m-2} \sum_{j=t-m+1}^{m-1} \omega^{rt+kj-jr} J^t \Bigr) =$$

$$(\text{замена } \ t-m=s) \qquad = \frac{1}{m^2} \sum_{s=0}^{m-1} \omega^{sr} J^s \Bigl(\sum_{j=0}^{s} \omega^{(k-r)j} + \sum_{j=s+1}^{m-1} \omega^{(k-r)j} \Bigr).$$

Выражение в последних скобках равно 0, если $k \neq r$ (полагаем $k, r \in 0 : m-1$), и равно m, если $k = r$.

Итак, доказали *идемпотентность* операторов $Q_k^2 = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \omega^{ks} J^s = Q_k$ и их взаимную ортогональность $Q_k \, Q_r = 0$, если $k \neq r$.

Операция сопряжения K^* оператора K для матрицы оператора есть транспонирование плюс комплексное сопряжение. С помощью соотношений $\omega^m = 1$, $J^m = E = J^0$ (в терминах матриц), домножив на $\omega^{ml} J^m$ соответствующие слагаемые, проверим самосопряженность операторов

$${Q_k}^* = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{-kl} (J^*)^l = \frac{1}{m} (\omega^{mk} J^m + \sum_{l=1}^{m-1} \omega_m^{(m-k)l} J^{(m-l)}) = Q_k.$$

В книге [12] доказано, что идемпотентный самосопряженный оператор является ортопроектором. Проверим, что проектирование осуществляется на собственное подпространство $R_k = \mathrm{Im}(Q_k)$, и вычислим собственные числа:

$$JQ_k = Q_k J = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{kl} J^{l+1} = \omega_m^{-k} \cdot \frac{1}{m}(J^0 + \sum_{s=1}^{m-1} \omega_m^{ks} J^s) = \omega_m^{-k} \cdot Q_k.$$

Так как формула (6) есть формула ДПФ, то восстановление производится по формуле (7) обратного к (6) ДПФ. □

Проверим свойство симметрии для ортопроекторов

$$\overline{Q_k} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{-kl} J^l = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{k(m-l)} J^l = Q_{m-k}. \tag{8}$$

Формула (7) содержит (при $l = 0$) сокращенное *разложение единицы* и (при $l = 1$) *спектральное разложение оператора.*

10°. В результате нормировки (деление на λ_1) любой оператор дискретного преобразования Уолша с симметричной матрицей (к этому классу относятся операторы DWT четырёх рассмотренных нумераций) превращается в оператор *инволюции* — унитарный действительный оператор периода 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для ортогонального симметричного дискретного преобразования Уолша любой нумерации с ортогональной матрицей* $J = \frac{1}{\lambda_1} V_s$ *проекторы на собственные подпространства* R_+ *и* R_-, *отвечающие собственным числам* ± 1, *имеют вид* $Q_+ = \frac{1}{2}(E + J)$ *и* $Q_- = \frac{1}{2}(E - J)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Квадрат любой ортогональной (действительной унитарной) несимметричной* W*-матрицы есть перестановочная матрица.*

Доказательство. Требование ортогональности означает нормировку матрицы DWT, то есть деление её на $\lambda_1 = \sqrt{N}$, $N = 2^s$.

Согласно определению W-матриц и предложению 2 из [1] каждая строка ортогональна какому-то одному столбцу, что и доказывает предложение. □

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любая ортогональная несимметричная* W*-матрица есть периодическая с чётным* $m = 2n$ *показателем периода и для неё верна теорема* 4. *Все нечётные степени этой матрицы есть ортогональные* W*-матрицы.*

ПРИМЕР 4. Для W-матриц четвёртого порядка ортогональные матрицы $\frac{1}{2}H_2$, $\frac{1}{2}W_2$, $\frac{1}{2}U_2$, $\frac{1}{2}B_2$ имеют спектральное разложение на проекторы согласно следствию 2. Базисы собственных подпространств находим по теоремам 2 и 3.

Пронормируем (поделим на 2) первую из матриц формулы (2), код строк которой (2 3). Если вычислим поочерёдно её степени J^2, J^3, J^4, J^5, $J^6 = E$, то найдем её период 6. При этом увидим, что $J^3 = \frac{1}{2}W_2$, а J^5 есть нормированная правая матрица формулы (2) с кодом строк (3 1).

Проведём вычисление по формулам (6). Заметим, что $Q_0 = \frac{1}{6}(E + J + {} + J^2 + J^3 + J^4 + J^5)$ и $Q_3 = \frac{1}{6}(E - J + J^2 - J^3 + J^4 - J^5)$ есть одномерные действительные проекторы, $Q_2 = \overline{Q_4}$ (см. (8)) есть одномерные комплексные, а $Q_1 = Q_5 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Дискретные функции Уолша* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0312`)

2. Paley R. E. A. C. *A Remarkable Series of Orthogonal Functions.* I, II // Proc. Lond. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.

3. Беспалов М. С. *Новая нумерация матриц Уолша* // Проблемы передачи инф. 2009. Т. 45. Вып. 4. С. 43–53.

4. Математическая энциклопедия. Т. 5. М., 1984.

5. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* М.: Наука, 1987.

6. Холл М. *Комбинаторика.* М.: Мир, 1970.

7. Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975.

8. Беспалов М. С. *Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша* // Проблемы передачи инф. 2010. Т. 46. Вып. 3. С. 60–79.

9. Bois P. *Determination des valeurs propres des matrices de Walsh, Hadamard et Walsh-Fourier* // Rev. CETHEDEC. 1973. V. 37. P. 65–71.

10. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1966.

11. Беспалов М. С. *Алгоритмы вычислений, основанные на представлении Шура* // Современная математика и её приложения. Труды межд. конф. по дифф. уравнениям и динамич. системам. 2006. Т. 38. Ч. 3. Ин-т матем. АН Грузии, Тбилиси. С. 28–36.

12. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1966.