ЧЕТВЁРТОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЁСТКОГО ФРЕЙМА*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

30 мая 2007 г.

1°. Напомним [1], что система ненулевых n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ при $m \geqslant n$ называется жёстким фреймом с константой фрейма $A > 0$, если выполнено одно из трёх эквивалентных условий:

$$1) \qquad x = \tfrac{1}{A} \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,;$$

$$2) \qquad \sum_{k=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_k \rangle\big]^2 = A\, \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,;$$

$$3) \qquad \varPhi\, \varPhi^T = A\, I_n\,,$$

где $\varPhi$ — матрица со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и I_n — единичная матрица порядка n.

Для константы фрейма A можно получить явное представление. Обозначим через $\operatorname{tr}(S)$ след квадратной мартицы S. Согласно 3),

$$\operatorname{tr}(\varPhi\, \varPhi^T) = \operatorname{tr}(A\, I_n) = n\, A.$$

Вместе с тем, $\operatorname{tr}(\varPhi\, \varPhi^T) = \operatorname{tr}(\varPhi^T \varPhi)$, поэтому

$$n\, A = \operatorname{tr}(\varPhi^T \varPhi) = \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2.$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

2°. Приводимое ниже утверждение содержит, по существу, ещё одно эквивалентное определение жёсткого фрейма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система ненулевых n-мерных векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $m \geqslant n$, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^2 \right)^2. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\varPhi$ — матрица со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и $S = \varPhi\varPhi^T$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(S) &= \operatorname{tr}(\varPhi^T\varPhi) = \sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|^2, \\ \operatorname{tr}(S^2) &= \operatorname{tr}\big((\varPhi\varPhi^T\varPhi)\,\varPhi^T\big) = \operatorname{tr}\big((\varPhi^T\varPhi)^2\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \right) = \sum_{i,j=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^2. \end{aligned}$$

Равенство (1) принимает вид

$$\operatorname{tr}(S^2) = \frac{1}{n}\big(\operatorname{tr}(S)\big)^2. \tag{2}$$

Если $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — жёсткий фрейм, то, согласно 3), $S = A\,I_n$. В этом случае условие (2), очевидно, выполняется. Проверим обратное, что из (2) следует равенство $S = A\,I_n$ с $A > 0$.

Матрица $S = \varPhi\varPhi^T$ симметрична и неотрицательно определена. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ её собственные числа и через $h_1, \dots, h_n$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы. Как известно [2, с. 47],

$$S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, h_k\, h_k^T.$$

Легко проверить, что

$$S^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\, h_k\, h_k^T,$$

$$\operatorname{tr}(S) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,, \qquad \operatorname{tr}(S^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\,.$$

Согласно (2), $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \frac{1}{n}\bigl(\sum_{k=1}^n \lambda_k\bigr)^2$ или

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right)^{1/2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,.$$

Получили, что среднее квадратическое неотрицательных чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ равно их среднему арифметическому. Это возможно только в случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_n =: A$, когда $S = A\,I_n$. Поскольку по условию векторы φ_i — ненулевые и

$$\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|^2 = \mathrm{tr}(S) = n\,A,$$

то $A > 0$. Предложение доказано. $\square$

3°. Выражение, стоящее в левой части (1), называется *фреймовым потенциалом* системы $\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ и обозначается $\mathrm{FP}(\Phi)$. Учитывая неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, приходим к такому заключению [3, 4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любой системы* $\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$, $m \geqslant n$, *ненулевых* n*-мерных векторов справедливо неравенство*

$$\mathrm{FP}(\Phi) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|^2\right)^2.$$

Равенство достигается только на жёстких фреймах.

4°. Приведём два следствия из предложения 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Система единичных* n*-мерных векторов* $\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$, $m \geqslant n$, *образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда*

$$\left(\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m}\bigl[\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\bigr]^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

т. е. когда среднее квадратическое модулей скалярных произведений $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$, $i,j \in 1:m$, *равно* $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Система* $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, *состоящая из* n *единичных* n*-мерных векторов, образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда эта система является ортонормированным базисом в* $\mathbb{R}^n$.

Действительно, в данном случае условие (1) принимает вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^2 = n.$$

Учитывая, что φ_i — единичные векторы, приходим к эквивалентному равенству

$$\sum_{i \neq j} \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^2 = 0,$$

гарантирующему справедливость следствия 2.

5°. Отдельно рассмотрим случай $m = n + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для того чтобы система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$, состоящая из $n+1$ единичных n-мерных векторов, была жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\big|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big| = \frac{1}{n} \qquad \textit{при } i \neq j. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. При $m = n + 1$ и единичных φ_i равенство (1) преобразуется к виду

$$\sum_{i \neq j} \big[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big]^2 = 1 + \frac{1}{n}\,. \tag{4}$$

Очевидно, что (4) следует из (3).

Н е о б х о д и м о с т ь. Возьмём жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ в $\mathbb{R}^n$ с единичными φ_k. Как известно [1], элементы такого фрейма допускают представление

$$\varphi_k = \sigma_k\, U\, b_k^n, \qquad k \in 1 : n+1,$$

где $\sigma_k = \pm 1$, U — некоторая ортогональная матрица и $\{b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ — фрейм Мерседес-Бенц, обладающий, в частности, таким свойством

$$\langle b_i^n, b_j^n \rangle = -\frac{1}{n} \qquad \text{при } i \neq j.$$

Приняв это во внимание, получим при $i \neq j$

$$\big|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\big| = \big|\langle U\, b_i^n, U\, b_j^n \rangle\big| = \big|\langle U^T U\, b_i^n, b_j^n \rangle\big| = \big|\langle b_i^n, b_j^n \rangle\big| = \frac{1}{n}\,.$$

Предложение доказано. □

6°. Дальнейшая информация о фреймах в конечномерных пространствах имеется в [3–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Секция «Дискретный гармонический анализ». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. `http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`

2. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб: Изд-во СПбГУ, 1997.

3. Benedetto J. J., Fickus M. *Finite normalized tight frames* // Adv. Comput. Math. 2003. Vol. 18. No. 2–4. P. 357–385.

4. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. Vol. 345. P. 61–86.

5. Casazza P. G., Kovačevič J. *Equal-norm tight frames with erasures* // Adv. Comput. Math. 2003. Vol. 18. No. 2–4. P. 387–430.

6. Goyal V. K., Kovačevič J., Kelner J. A. *Quantized frame expansions with erasures* // Appl. Comput. Harmonic Anal. 2001. Vol. 10. No. 3. P. 203–233.

7. Han D., Larson D. R. *Frames, bases and group representation* // Memoires Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 147. No. 697. P. 1–94.