ОЦЕНКА СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

Н. О. Котелина

nad7175@yandex.ru

29 мая 2010 г.

Аннотация

Приводится теорема Дельсарта для оценки снизу числа элементов сферического дизайна и её модификация, использующая только чётные полиномы. Рассматривается соответствующая сеточная задача линейного программирования и приводятся результаты расчётов.

1°. Обозначения и предварительные сведения. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть

$$S^{n-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|x\| = 1\big\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть t — натуральное число. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} P(x)\, dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{1}$$

для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

Одной из важных задач теории дизайнов является нахождение для данных n и t сферического t-дизайна с минимальным количеством элементов (см., например, [4]). Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ была получена Ф. Дельсартом ([1, 5]). Формулировка и доказательство теоремы Дельсарта используют полиномы Гегенбауэра.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Полиномы Гегенбауэра и теорема Дельсарта. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 2$. Рассмотрим вес

$$w_n(u) = (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}, \qquad u \in [-1,1].$$

Пусть $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов Гегенбауэра. Она обладает свойством ортогональности с весом $w_n(u)$

$$\int_{-1}^{1} Q_k(u)\, Q_s(u)\, w_n(u)\, du = 0, \qquad k \neq s.$$

Будем считать, что выполняется следующее условие нормировки

$$Q_k(1) = 1.$$

Для полиномов Гегенбауэра справедливо рекуррентное соотношение

$$Q_0(u) \equiv 1, \qquad Q_1(u) = u,$$
$$\big(k+n-2\big)\, Q_{k+1}(u) = \big(2k+n-2\big)\, u\, Q_k(u) - k\, Q_{k-1}(u).$$

Из него следует, что

$$u\, Q_k(u) = \frac{(k+n-2)\, Q_{k+1}(u) + k\, Q_{k-1}(u)}{2k+n-2}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначив

$$\alpha_k = \frac{k+n-2}{2k+n-2} \quad \text{и} \quad \beta_k = \frac{k}{2k+n-2},$$

получим

$$u\, Q_k(u) = \alpha_k\, Q_{k+1}(u) + \beta_k\, Q_{k-1}(u), \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Заметим, что при $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ числа α_k и β_k положительные.

Ф. Дельсарт [5] в 1973 г. предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического дизайна порядка t. Зафиксируем натуральное $d > t$. Пусть $\mathcal{P}_d^+$ — множество алгебраических полиномов степени не выше d, удовлетворяющих условиям

$$F(x) \geqslant 0 \quad \text{для всех } x \in [-1,1] \ \text{ и } \ F(1) > 0.$$

Каждый полином $F(x)$ можно разложить по полиномам Гегенбауэра

$$F(x) = \sum_{k=0}^{d} F_k\, Q_k(x),$$

где коэффициенты Фурье F_k определяются следующей формулой

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{\|Q_k\|^2}, \qquad k \in 0 : d.$$

Здесь $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $L_2[-1,1]$ с весом $w_n(u)$, $\|Q_k\|^2 = (Q_k, Q_k)$. Введём множество

$$M(n,t,d) = \bigl\{F \in \mathcal{P}_d^+ \bigm| F_k \leqslant 0,\ k \in t+1 : d\bigr\}.$$

ТЕОРЕМА 1 (Дельсарт [5])**.** *Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический дизайн порядка t. Тогда*

$$m \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0} \,\middle|\, F \in M(n,t,d)\right\}, \tag{3}$$

где F_0 — нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

З а м е ч а н и е. Теорему Дельсарта можно переформулировать в следущем виде. Обозначим $b(n,t)$ минимальное количество элементов сферического дизайна порядка t в пространстве $\mathbb{R}^n$ (при условии, что хотя бы один такой сферический дизайн существует). Тогда справедливо неравенство

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0} \,\middle|\, F \in M(n,t,d)\right\},$$

где F_0 — нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Для оценки снизу количества элементов сферического t-дизайна можно также использовать модификацию теоремы 1, использующую только чётные полиномы.

3°. Модификация теоремы Дельсарта, использующая только чётные полиномы. Пусть везде дальше t нечётное, $t = 2s+1$. Введём класс полиномов

$$\widehat{M}(n,t,d) := \bigl\{F \in M(n,t,d) \bigm| F(-u) = F(u)\ \ \forall\, u \in [-1,1]\bigr\}.$$

Тогда справедлива теорема, которая впервые появилась в работе [3]. Ниже приведено более подробное её доказательство.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо неравенство*

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{2F(1)}{F_0} \,\middle|\, F \in \widehat{M}(n,t,d)\right\}, \tag{4}$$

где F_0 — нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Доказательство. Возьмём $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$. Докажем, что $b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}$.

Введём полином $F^*(u) = (1+u)\,\widehat{F}(u)$. Проверим, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. Так как $\widehat{F}(u)$ неотрицательный на $[-1,1]$ полином и $\widehat{F}(1) > 0$, то F^* тоже будет неотрицательным на $[-1,1]$ и $F^*(1) > 0$. Рассмотрим коэффициенты Фурье для F^*. При чётном k интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку равен нулю. Получаем

$$F_k^* = \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1} \widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du + \int_{-1}^{1} u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du\right\} = \widehat{F}_k\,.$$

При нечётном k воспользуемся соотношением (2):

$$\begin{aligned}
F_k^* &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1} \widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du + \int_{-1}^{1} u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du\right\} = \\
&= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1} u\,\widehat{F}(u)\,Q_k(u)\,w_n(u)\,du = \\
&= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1} \widehat{F}(u)\big[\alpha_k\,Q_{k+1}(u) + \beta_k\,Q_{k-1}(u)\big]\,w_n(u)\,du = \\
&= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\Big[\alpha_k\,\big\|Q_{k+1}\big\|^2\,\widehat{F}_{k+1} + \beta_k\,\big\|Q_{k-1}\big\|^2\,\widehat{F}_{k-1}\Big].
\end{aligned}$$

Проверим, что

$$F_k^* \leqslant 0, \qquad k \in t+1 : d+1.$$

Пусть k чётное, $k \geqslant t+1$. Тогда

$$F_k^* = \widehat{F}_k \leqslant 0.$$

Пусть k нечётное, $k \geqslant t+1$. Тогда $k-1$, $k+1$ чётные и $k-1$, $k+1 \geqslant t+1$, так как t нечётное. Поскольку $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$, то $\widehat{F}_{k-1} \leqslant 0$, $\widehat{F}_{k+1} \leqslant 0$ и, следовательно, $F_k^* \leqslant 0$. Из этого следует, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. По оценке Дельсарта (3) получаем, что

$$b(n,t) \geqslant \frac{F^*(1)}{F_0^*}\,, \tag{5}$$

причём

$$F_0^* = \frac{1}{\|Q_0\|^2}\int_{-1}^{1} \big(1+u\big)\,\widehat{F}(u)\,w_n(u)\,du = \widehat{F}_0\,, \qquad F^*(1) = 2\widehat{F}(1).$$

Следовательно, (5) можно переписать в виде

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}\,. \tag{6}$$

Переходя к супремуму по $\widehat{F}$ из класса $\widehat{M}(n,t,d)$, получаем оценку (4).

Теорема доказана. $\square$

4°. Сеточная задача линейного программирования. Для данных n, t, используя оценку Дельсарта (4), оценим величину $b(n,t)$. Будем предполагать, как и ранее, что t нечётное, $t=2s+1$. Выберем $d>s$ и равномерную сетку на $[0,1]$. Положим

$$u_i = \frac{i-1}{M_0}\,, \qquad i=1,\ldots,M_0+1.$$

Задача оценивания $b(n,t)$ сводится к нахождению полинома $F(u)\in \widehat{M}(n,t,2d)$ вида

$$F(u) = F_0 + \sum_{k=1}^{d} F_k\, Q_{2k}(u),$$

максимизирующего $F(1)$, при условии $F_k\leqslant 0$, $k\geqslant s+1$. При этом F_0 будем фиксировать, взяв равным 1. Запишем соответствующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} L(F_1,\ldots,F_d) &:= 2F(1) = 2+2(F_1+F_2+\cdots+F_d)\to \max,\\ F(u_i) &= 1+\sum_{k=1}^{d} F_k\, Q_{2k}(u_i)\geqslant 0, \qquad i\in 1:M_0+1,\\ F_0 &= 1,\\ F_k &\leqslant 0, \qquad k\in s+1:d. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $(F_1^*,\ldots,F_d^*)$ — оптимальное решение (7), то $F^*(u)=1+\sum_{k=1}^{d}F_k^*\,Q_{2k}(u)$ — оптимальный полином. Для того, чтобы на отрезке $[0,\,1]$ выполнялось условие неотрицательности, введём величину

$$\varepsilon = -\min\bigl\{F^*(u)\bigm| u\in[0,\ 1]\bigr\},$$

и рассмотрим полином

$$\widetilde{F}(u) = F^*(u)+\varepsilon.$$

Заметим, что $\widetilde{F}(u)\geqslant 0$ на $[0,\,1]$ и $\widetilde{F}(u)\in\widehat{M}(n,t,d)$. Коэффициенты $\widetilde{F}$ и F^* связаны соотношениями

$$\widetilde{F}_k = F_k^*, \quad k=1:d, \qquad \widetilde{F}_0 = F_0^*+\varepsilon.$$

По оценке Дельсарта (4)

$$b(n,t)\geqslant \frac{2\widetilde{F}(1)}{\widetilde{F}_0} = \frac{2(F(1)+\varepsilon)}{1+\varepsilon} = \frac{L^*+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,,$$

где $L^*=L(F_1^*,\ldots,F_d^*)$ — максимальное значение целевой функции.

5°. Модифицированный симплекс-метод. В задаче (7) представим

$$F_k = F'_k - F''_k, \qquad F'_k \geqslant 0, \ \ F''_k \geqslant 0, \qquad k \in 1:s;$$
$$F_k = -F''_k, \qquad F''_k \geqslant 0, \qquad k \in s+1:d.$$

Добавим переменные z_i, $i \in 1 : M_0 + 2$, и запишем задачу, эквивалентную (7):

$$\widetilde{L}(F_1, \ldots, F_d) := -2F(1) = -2 - 2\sum_{k=1}^{s} (F'_k - F''_k) + 2 \sum_{k=s+1}^{d} F''_k \to \min,$$

$$F_0 + \sum_{k=1}^{s} Q_{2k}(u_i) \left(F'_k - F''_k\right) - \sum_{k=s+1}^{d} Q_{2k}(u_i)\, F''_k - z_i = 0, \quad i \in 1 : M_0 + 1; \tag{8}$$
$$F_0 = 1,$$
$$F'_k \geqslant 0, \ \ k \in 1:s; \quad F''_k \geqslant 0, \ \ k \in 1:d, \quad z_i \geqslant 0, \ \ i \in 1 : M_0 + 1.$$

Введём индексные множества $M = 1 : M_0 + 2$, $D = 1 : d$ и рассмотрим матрицу $A[M, D]$ с элементами

$$A[i, k] = Q_{2k}(u_i), \qquad i \in 1 : M_0 + 1, \quad k \in 1 : d;$$
$$A[M_0 + 2, k] = 0, \qquad k \in 1 : d.$$

Тогда систему ограничений в задаче (8) можно переписать в виде

$$F_0\, \mathbf{1}[M] + \sum_{k=1}^{s} \left(F'_k - F''_k\right) A[M, k] - \sum_{k=s+1}^{d} F''_k A[M, k] - \sum_{i=1}^{M_0+1} z_i\, e_i = b[M],$$

где

$$\mathbf{1}[M] = (1, \ldots, 1)^T, \qquad b[M] = (0, \ldots, 0, 1)^T.$$

Задачу (8) будем решать с помощью модифицированного симплекс-метода.

Укажем начальный базисный план

$$F_0 = 1, \quad z_i = 1 \quad \text{при} \ \ i \in 1 : M_0 + 1;$$

остальные переменные равны нулю. Проиндексируем неизвестные в задаче (8). Пусть x — массив неизвестных в задаче (8). Положим

$$x[k] = F'_k\,, \ \ k \in 1 : s; \quad x[0] = F_0\,; \quad x[-k] = F''_k\,, \ \ k \in 1 : d;$$
$$x[s + i] = z_i\,, \quad i \in 1 : M_0 + 1.$$

Тогда множество базисных индексов N' для выбранного нами начального базисного плана выглядит следующим образом:

$$N' = \bigl\{0, s + 1, \ldots, s + M_0 + 1\bigr\}, \qquad \bigl|N'\bigr| = M_0 + 2.$$

Столбцы, соответствующие базисным неизвестным, линейно независимы. Это следует из того, что для базисной матрицы $A[M, N']$ можно указать обратную базисную матрицу $B[N', M]$. Базисная матрица и обратная к ней при $M_0 = 4$ имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

При составлении программы мы не будем хранить в памяти компьютера всю матрицу коэффициентов, достаточно хранить матрицу $A[M, D]$.

Обратим внимание на то, как в нашей программе будут вычисляться оценки.

Возьмём границу $barrier = 10^{-14}$. Будем продолжать вычисления, пока максимальная оценка max остаётся не меньше $barrier$. Оценки будем вычислять по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &\varepsilon[F'_k] = y[M]\, A[M, k] + 2 && \text{при} \;\; k \in 1 : s; \\ &\varepsilon[F''_k] = -\varepsilon[F'_k] && \text{при} \;\; k \in 1 : s; \\ &\varepsilon[F''_k] = -y[M]\, A[M, k] - 2 && \text{при} \;\; k \in s+1 : d; \\ &\varepsilon[z_i] = y[M](-e_i) = -y[i] && \text{при} \;\; i \in 1 : M_0 + 1. \end{aligned}$$

6°. Результаты работы программы. Результаты работы программы поместим в таблицу. В ней K — наименьшее известное количество элементов сферического дизайна, приведенное в [3]. Там же указан источник, где описан сферический дизайн с K элементами, например, при $n = 4$, $t = 11$, дизайн со 120 элементами описан в [2]; $b_D(n, t)$ — оценка Дельсарта, вычисляемая по следующей формуле (см. [1, 5])

$$b_D(n, t) = 2C_{n+s-1}^{n-1} \quad \text{для} \;\; t = 2s + 1.$$

Таблица

n	t	d	M_0	L^*	ε	$\frac{L^*+2\varepsilon}{1+\varepsilon}$	$b_D(n,t)$	K
2	3	2	100	4	0	4	4	4
3	5	3	100	12.006	$7.17e-004$	11.99	12	12
4	3	2	100	8	0	8	8	8
4	5	3	100	20.007	0.002	19.97	20	24
4	7	5	100	41.1	$7.54e-004$	41.07	40	46
4	7	5	200	41.1	$1.81e-004$	41.09	40	46
4	9	7	100	73.64	0.006	73.20	70	86
4	11	11	100	120.05	0.06	119.33	112	120
4	19	19	1000	499.35	0.002	498.61	440	720
8	7	4	100	240	0.001	239.70	240	240
8	11	8	800	1856	$2.28e-004$	1855.50	1584	2400
8	13	12	1000	4360.7	$7.02e-004$	4357.7	3432	24240
8	15	16	500	9191.5	0.005	9140	6864	26400
12	5	3	100	156.08	$6.34e-004$	155.98	156	756
12	7	4	100	728.52	0.002	727.08	728	756
12	9	6	600	2939.80	$2.28e-4$	2939.10	2730	8064
12	11	7	1000	10604	$1.05e-4$	10602	8736	50400

ЛИТЕРАТУРА

1. Delsarte P., Goetals J. M., Seidel J. J. *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

2. Андреев Н. Н. *Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере* //Матем. заметки. Сер. 2000. Т. 67. № 4. С. 489–497.

3. de la Harpe P., Pache C., Venkov B. *Construction of spherical cubature formulas, using lattices* // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18. Вып. 1. С. 162–186.

4. Bonnai E., Munemasa A., Venkov B. *The nonexistence of certain tight spherical designs* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. С. 1–23.

5. Delsarte P. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Reports (Suppl.). 1973. V. 10.