ТРИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДИЗАЙНОВ*

Р. Е. Афонин
snedekorr@gmail.com

А. Б. Певный
pevnyi@syktsu.ru

22 мая 2010 г.

Доказывается эквивалентность трёх определений сферических t-дизайнов. Этот результат был установлен ранее в статье В. А. Юдина [1].

1°. Зафиксируем натуральные числа $n \geqslant 2$ и $t \geqslant 1$. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1\, y_1 + \dots + x_n\, y_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть

$$S^{n-1} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|x\| = 1\bigr\}$$

— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

В работе [1] приведены три определения сферических t-дизайнов. Напомним эти определения и установим их эквивалентность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если выполнено равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} P(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{1}$$

для любого полинома $P(x)$ степени не выше t. Здесь $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы S^{n-1}.

Второе определение связано с полиномами Гегенбауэра $Q_k(u)$ степени k. Их основное свойство — ортогональность на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$w_n(u) = \bigl(1 - u^2\bigr)^{(n-3)/2}.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Свойство ортогональности записывается в виде

$$\int_{-1}^{1} Q_k(u)\, Q_l(u)\, w_n(u)\, du = 0 \quad \text{при} \;\; k \neq l.$$

Это свойство определяет полиномы Q_k с точностью до множителя. В данном докладе множитель не играет никакой роли и поэтому не будем его фиксировать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если для любого $k = 1, 2, \dots, t$ выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0 \qquad \forall\, x \in S^{n-1}. \tag{2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^k = \begin{cases} 0, & k \text{ — нечётное, } k \leqslant t, \\ c_k \|x\|^k, & k \text{ — чётное, } k \leqslant t, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$c(0) = 1; \qquad c(k) = \frac{(k-1)!!}{n\,(n+2)\cdots(n+k-2)} \quad \text{при } k \text{ чётном, } k \geqslant 2. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. При $k = 0$ пользуемся естественными соглашениями $[\langle \varphi_i, x\rangle]^0 = 1$ и $\|x\|^0 = 1$. Поэтому при $k = 0$ равенство (3) тривиально.

При чётном $k \geqslant 2$ равенство (3) иногда называется тождеством Варинга, по имени английского математика Э. Варинга (1734–1798), поставившего задачу о представлении $\|x\|^k$ в виде суммы k-х степеней линейных форм (см. [2]).

2°. Вспомогательные леммы. Первая лемма в [2] приписывается Д. Гильберту (без точной ссылки).

ЛЕММА 1. *Для любого фиксированного $\varphi \in \mathbb{R}^n$ и чётного $k \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$\int_{S^{n-1}} \big[\langle \varphi, x\rangle\big]^k\, dS_x = c(k)\, \sigma_n \|\varphi\|^k. \tag{5}$$

Доказательство приводится в докладе [4].

ЛЕММА 2. *Для любого $\varphi \in S^{n-1}$ справедливы равенства*

$$\int_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle \varphi, x\rangle\big)\, dS_x = 0, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Доказательство приводится в докладе [3].

3°. Эквивалентность трёх определений сферического дизайна.

ТЕОРЕМА. *Определения* 1, 2, 3 эквивалентны.

Доказательство. Доказательство проведём по следующей схеме: (1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (1). Эти три этапа пройдем в основном следуя В. А. Юдину [1], но с некоторыми изменениями для достижения большей ясности.

I. Пусть выполнено равенство (1) для любого полинома $P(x)$ степени не выше t. Зафиксируем $y \in S^{n-1}$ и $k \in 1 : t$. Рассмотрим полином $P(x) = Q_k(\langle x, y\rangle)$ степени k. Запишем равенство (1)

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x)\, dS.$$

Подставим выражение для $P(x)$ и воспользуемся леммой 2. Получим

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, y\rangle\big) = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} Q_k\big(\langle x, y\rangle\big)\, dS_x = 0,$$

откуда следует (2).

II. Пусть выполнено (2), то есть

$$\sum_{i=1}^{m} Q_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0 \quad \forall\, x \in S^{n-1} \ \text{ и } \ \forall\, k \in 1 : t.$$

Возьмем теперь произвольное $k \in 0 : t$ и рассмотрим два случая.

Число k — нечётное, $k = 2s + 1$. Тогда u^k разлагается по нечётным полиномам Гегенбауэра:

$$u^k = \sum_{j=0}^{s} d_j\, Q_{2j+1}(u).$$

Отсюда

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s} d_j \sum_{i=1}^{m} Q_{2j+1}\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0.$$

Число k — чётное, $k = 2s$. Тогда

$$u^k = \sum_{j=0}^{s} d_j\, Q_{2j}(u).$$

Отсюда при любом $x \in S^{n-1}$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, x\rangle\big]^k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s} d_j \sum_{i=1}^{m} Q_{2j}\big(\langle\varphi_i, x\rangle\big).$$

При $j \in 1:s$ последняя сумма равна нулю в силу (2). При $j = 0$ полином $Q_0(u)$ равен постоянной Q_0, поэтому

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, x\rangle\big]^k = d_0\, Q_0 \qquad \forall\, x \in S^{n-1}. \tag{7}$$

Проинтегрируем обе части (7) по сфере S^{n-1}. В силу леммы 1 придём к равенству

$$c(k)\,\sigma_n = d_0\, Q_0\, \sigma_n\,,$$

откуда $d_0\, Q_0 = c(k)$. Для произвольного $x \neq \mathbb{O}$ подставим в (7) вектор $x/\|x\|$. Придём к равенству (3).

III. Пусть выполнены соотношения (3). Для проверки (1) нам будет удобно использовать одну конструкцию из статьи [5].

Для любого $k \in 0:t$ рассмотрим пространство $\mathscr{P}_{n,k}$ однородных полиномов от n переменных степени k. Полиномы $f, g \in \mathscr{P}_{n,k}$ запишем в виде

$$f(x) = \sum_{|i|=k} a_i\, x^i, \qquad g(x) = \sum_{|i|=k} b_i\, x^i,$$

где $i = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс, $|i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$, $x^i = x_1^{i_1}\, x_2^{i_2}\, \cdots\, x_n^{i_n}$. Нулевой полином обозначаем $\mathbb{O}$. Введём скалярное произведение в $\mathscr{P}_{n,k}$:

$$\big[f, g\big] = \sum_{|i|=k} \frac{a_i\, b_i}{d_i}\,, \quad \text{где} \;\; d_i = \frac{k!}{i_1!\, i_2! \cdots i_n!}\,.$$

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}^n$ введём полином

$$\rho_\varphi^{(k)}(x) = \big[\langle\varphi, x\rangle\big]^k = \big[\varphi_1\, x_1 + \varphi_2\, x_2 + \cdots + \varphi_n\, x_n\big]^k.$$

По полиномиальной формуле

$$\rho_\varphi^{(k)}(x) = \sum_{|i|=k} d_i\, \varphi^i\, x^i. \tag{8}$$

Отсюда для любого $f \in \mathscr{P}_{n,k}$

$$\big[\rho_\varphi^{(k)}, f\big] = \sum_{|i|=k} \frac{d_i\, \varphi^i\, a_i}{d_i} = f(\varphi). \tag{9}$$

Перейдём к проверке равенства (1). Произвольный полином $P(x)$ степени не выше t можно представить в виде суммы однородных полиномов:

$$P(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_t(x),$$

где $f_k \in \mathscr{P}_{n,k}$, $k \in 0 : t$. Поэтому равенство (1) достаточно проверить для полиномов $\{f_k\}$.

Пусть k — нечётное, $k \leqslant t$. Тогда в силу (3)

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \big[\langle \varphi_i, x\rangle\big]^k \equiv 0,$$

что равносильно равенству

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}^{(k)} = \mathbb{O}. \tag{10}$$

Умножим (10) скалярно на f_k. Получим в силу (9)

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \big[\rho_{\varphi_i}^{(k)}, f_k\big] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_k(\varphi_i) = \ 0 \ = \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} f_k(x)\, dS,$$

где интеграл равен нулю в силу нечётности $f_k(x)$.

Для $f_0(x) \equiv const$ равенство (1) примет вид $1 = 1$.

Пусть k — чётное, $k \in 2 : t$. Введём полином

$$\omega_k(x) = \|x\|^k = \big(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\big)^{k/2},$$

принадлежащий пространству $\mathscr{P}_{n,k}$. Равенство (3) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_{\varphi_i}^{(k)} = c(k)\, \omega_k\, . \tag{11}$$

Умножим обе части (11) скалярно на f_k. Получим

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \big[\rho_{\varphi_i}^{(k)}, f_k\big] = c(k)\big[\omega_k, f_k\big]. \tag{12}$$

Левая часть этого равенства равна $\frac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{m} f_k(\varphi_i)$. Вычислим правую часть (12).

По лемме 1

$$\int\limits_{S^{n-1}} \rho_{\varphi}^{(k)}(x)\, dS_\varphi \ = \int\limits_{S^{n-1}} \big[\langle x, \varphi\rangle\big]^k\, dS_\varphi = \ c(k)\, \sigma_n\, \omega_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Умножим (13) скалярно на f_k:

$$\Big[\int\limits_{S^{n-1}} \rho_\varphi^{(k)}(x)\,dS_\varphi\,,\ f_k\Big] = \sigma_n\, c(k)\big[\omega_k, f_k\big]. \tag{14}$$

Из равенства (8) получаем представление

$$\int\limits_{S^{n-1}} \rho_\varphi^{(k)}(x)\,dS_\varphi \;=\; \sum_{|i|=k} d_i\,M_i\,x^i,$$

где

$$M_i \;=\; \int\limits_{S^{n-1}} \varphi^i\,dS_\varphi\,.$$

Полином f_k запишем в виде $f_k(x) = \sum\limits_{|i|=k} a_i\,x^i$. Тогда в (14) левая часть принимает вид

$$\sum_{|i|=k} \frac{d_i\,M_i\,a_i}{d_i} \;=\; \int\limits_{S^{n-1}} \sum_{|i|=k} a_i\,\varphi^i\,dS_\varphi \;=\; \int\limits_{S^{n-1}} f_k(\varphi)\,dS_\varphi\,.$$

В интеграле заменим φ на x. На основании (14) и (12) приходим к равенствам

$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} f_k(x)\,dS_x = c(k)\big[\omega_k, f_k\big] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_k(\varphi_i).$$

Тем самым проверено, что равенство (1) выполнено для всех полиномов f_k, $k \in 0 : t$, следовательно, и для полинома $P(x)$.

Теорема доказана. $\square$

4°. Одно свойство сферических дизайнов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ является сферическим t-дизайном. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Q_k\big(\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\big) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, t, \tag{15}$$

где Q_k — полином Гегенбауэра степени k.

Равенство (15) сразу следует из определения 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Юдин. *Вращения сферических дизайнов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 3. С. 39–45.

2. B. Reznick. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No 463. P. 1–155.

3. Р. Е. Афонин, В. Н. Малоземов, А. Б. Певный. *Оценки Дельсарта для количества элементов сферического дизайна* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 20 марта 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0320`)

4. Н. О. Котелина, А. Б. Певный. *Эквивалентные определения сферических дизайнов* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0404`)

5. B. Venkov. *Réseaux et designs sphériques* // Réseaux Euclidiens. Designs sphériques et Formes Modulaires. Enseign. Math. Géneve. 2001. P. 10–86.