СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ*

В. В. Максименко — xupypr@xupypr.com

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

26 марта 2008 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из [1].

1°. Система векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ из $\mathbb{R}^n$ называется *равноугольной*, если

$$\left|\varphi_k\right| = 1 \quad \text{при всех } k \in 1:m \quad \text{и} \quad \left|\langle\varphi_k, \varphi_s\rangle\right| = c \quad \text{при } k \neq s.$$

Здесь c — фиксированное число. Нас интересует случай $m \geqslant n$. В докладе [2] выяснено, при каком значении c равноугольная система является жёстким фреймом. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равноугольная система является жёстким фреймом тогда и только тогда, когда*

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}}\,.$$

2°. **Необходимое и достаточное условия существования равноугольного жёсткого фрейма**. К сожалению равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (n, m). Чтобы выяснить для каких существуют, а для каких — нет, нам придётся проделать некоторые построения.

Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$, $m > n > 1$. Из столбцов $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ составим матрицу $\varPhi$ размера $n \times m$. По критерию жёсткого фрейма

$$\varPhi\varPhi^T = \tfrac{m}{n}\,I_n.$$

Рассмотрим теперь матрицу Грама $G = \varPhi^T\varPhi$. Для её элементов в силу равноугольности имеем

$$G_{ii} = 1, \quad i \in 1:m; \quad G_{ik} = \pm c, \quad i \neq k.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Поскольку $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — жёсткий фрейм, то

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}}\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что $0 < c < 1$. Кроме того, справедливо равенство

$$G^2 = \Phi^T \big(\Phi\,\Phi^T\big)\,\Phi = \tfrac{m}{n}\,G. \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу

$$Q = \tfrac{1}{c}\,(G - I_m).$$

У неё $Q_{ii} = 0$, $i \in 1:m$; $Q_{ik} = \pm 1 = \operatorname{sign}\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle$ при $i \neq k$.

Вычислим матрицу Q^2. С учётом равенства (1) имеем

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{c^2}\,\big(G^2 - 2\,G + I_m\big) = \frac{1}{c^2}\big(\frac{m}{n}\,G - 2\,G + I_m\big) = \\ &= \frac{1}{c^2}\Big[\frac{m-2n}{n}\big(G - I_m\big) + \frac{m-n}{n}\,I_m\Big] = \\ &= (m-1)\,I_m + \mu_{m,n}\,Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mu_{m,n} = \frac{m-2n}{n\,c} = (m-2n)\sqrt{\frac{m-1}{n\,(m-n)}}\,. \tag{3}$$

Из равенства (2) при $i \neq j$ получим $\big(Q^2\big)_{ij} = \pm\mu_{m,n}$, откуда следует, что $\mu_{m,n}$ является целым числом. Это одно из необходимых условий существования равноугольного жёсткого фрейма.

Чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие, введём понятие сигнатурной матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Симметричная матрица Q размера $m \times m$ называется *сигнатурной*, если

$$Q_{ii} = 0, \quad i \in 1:m; \quad Q_{ik} = \pm 1 \quad \text{при } i \neq k.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы при данных n и m, $m > n > 1$, существовал равноугольный жёсткий фрейм, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) число $\mu_{m,n}$, определённое равенством (3), является целым;

2) существует сигнатурная матрица Q такая, что

$$Q^2 = (m-1)\,I_m + \mu_{m,n}\,Q\,. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость установлена выше. Докажем достаточность. Введём матрицу

$$G = I_m + c\,Q\,, \quad \text{где} \quad c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}}\,.$$

У неё $G_{ii} = 1$, $i \in 1:m$; $G_{ik} = \pm c$ при $i \neq k$. Вычислим G^2. С учётом (4) элементарными вычислениями получим

$$\begin{aligned} G^2 &= I_m + 2\,c\,Q + c^2\,Q^2 = \\ &= I_m + 2\,c\,Q + c^2\,(m-1)\,I_m + c^2\,\mu_{m,n}\,Q = \\ &= \tfrac{m}{n}\,(I_m + c\,Q) = \tfrac{m}{n}\,G\,. \end{aligned}$$

Из равенства $G^2 = \frac{m}{n}\,G$ следует, что матрица G имеет собственные числа $\frac{m}{n}$ и 0. Обозначим кратность первого числа через p. Тогда 0 имеет кратность $m-p$. Поскольку $G \neq \mathbb{O}$, то $p \geqslant 1$.

Симметричную матрицу G можно представить в виде

$$G = P^T \Lambda\, P,$$

где P — ортогональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\frac{m}{n}, \ldots, \frac{m}{n}, 0, \ldots, 0)$. Рассмотрим матрицу L размера $p \times m$ вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{A} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{A} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

где $A = \frac{m}{n}$. Тогда $L^T L = \Lambda$. Для матрицы $\varPhi = L\,P$ справедливо равенство

$$\varPhi^T \varPhi = P^T L^T L\, P = G.$$

Столбцы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ матрицы $\varPhi$ образуют равноугольную систему. Действительно, $\|\varphi_k\|^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = G_{ii} = 1$, $i \in 1:m$;

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = G_{ik} = c\,Q_{ik} = \pm c, \qquad i \neq k.$$

Кроме того, матрицы $\varPhi^T \varPhi = G$ и $\varPhi\,\varPhi^T$ имеют одинаковые ненулевые собственные числа. Следовательно, матрица $\varPhi\,\varPhi^T$ имеет только одно собственное число $\frac{m}{n}$ кратности p и, значит,

$$\varPhi\,\varPhi^T = \tfrac{m}{n}\,I_p\,.$$

По определению система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^p$. Но тогда по предложению 1 справедливо равенство

$$c = \sqrt{\frac{m-p}{p\,(m-1)}}\,.$$

Отсюда

$$\frac{m-n}{n\,(m-1)} = \frac{m-p}{p\,(m-1)}\,,$$

то есть $p = n$. Построили равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. □

3°. Оценки числа элементов равноугольного жёсткого фрейма. В докладе [2] приведено простое доказательство следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $m > n > 1$. Если $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$, то*

$$m \leqslant \frac{n\,(n+1)}{2}\,. \tag{5}$$

Это неравенство в сочетании с теоремой 1 позволяет установить другое ограничение на число m.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $n \geqslant 2$, $m > n+1$. Если $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$, то*

$$m \leqslant \frac{(m-n)(m-n+1)}{2}\,. \tag{6}$$

Доказательство. По теореме 1 фрейму $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ соответствует сигнатурная матрица Q, удовлетворяющая уравнению

$$Q^2 = (m-1)\, I_m + \mu_{m,n}\, Q,$$

где $\mu_{m,n}$ задано формулой (3). Заменим в этой формуле n на $m-n$. Отметим, что

$$\mu_{m,m-n} = (2n-m)\sqrt{\frac{m-1}{(m-n)\,n}} = -\mu_{m,n}\,.$$

Поэтому сигнатурная матрица $-Q$ удовлетворяет равенству

$$(-Q)^2 = (m-1)\, I_m + \mu_{m,m-n}\,(-Q).$$

Поскольку $m-n \geqslant 2$, $m > m-n$, то по теореме 1 существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m-n}$.

По предложению 2 справедливо неравенство (6). Предложение доказано. □

Неравенства (5) и (6) вместе с требованием целочисленности $\mu_{m,n}$ позволяют отбросить многие пары (n, m), для которых заведомо не существуют равноугольные жёсткие фреймы. Приведём ряд примеров для случая $n \geqslant 2$, $m > n + 1$.

ПРИМЕР 1. $n = 3$. Неравенство (5) имеет вид $m \leqslant 6$.

При $m = 5$ не выполнено неравенство (6).

При $m = 6$ оба неравенства (5) и (6) превращаются в равенства. Возникает подозрение, что в случае $(3, 6)$ есть равноугольный жёсткий фрейм. В явном виде он выписан в докладе [2].

ПРИМЕР 2. $n = 4$. Неравенство (5) имеет вид $m \leqslant 10$.

При $m = 6, 7$ не выполнено неравенство (6).

При $m = 9, 10$ число $\mu_{m,4}$ не целое.

При $m = 8$ выполнены неравенства (5) и (6) и $\mu_{8,4} = 0$. Как будет показано далее, в случае $(4, 8)$ равноугольного жёсткого фрейма не существует.

4°. **Нахождение равноугольных жёстких фреймов в случае $\boldsymbol{m = 2n}$ методом перебора сигнатурных матриц**. Случай $m = 2n$ является исключительным. При $m = 2n$ число $\mu_{m,n}$ равно нулю и по теореме 1 для существования равноугольного жёсткого фрейма необходимо и достаточно существование сигнатурной матрицы Q, удовлетворяющей равенству

$$Q^2 = (m - 1)\, I_m\,. \tag{7}$$

По определению сигнатурная матрица Q симметрична. Поэтому если через Q_i обозначить i-ю строку Q, то условие (7) запишется в виде

$$\langle Q_i, Q_j \rangle = \begin{cases} m - 1, & i = j, \\ \quad 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Условие $\langle Q_i, Q_i \rangle = m - 1$ выполняется автоматически, так как каждая строка Q_i содержит один ноль и $m - 1$ элементов, равных ± 1. Так что нужно только обеспечить ортогональность строк: $\langle Q_i, Q_j \rangle = 0$ при $i \neq j$.

Отметим, что если сигнатурная матрица Q удовлетворяет (7), то после умножения j-го столбца и строки Q_j на -1 снова получим решение (7). Поэтому можно считать, что в первой строке Q_1 стоят единицы:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее можно пытаться строить строки $Q_2, \ldots, Q_m$ так, чтобы каждая строка была ортогональна предыдущим строкам.

При $m = 6$ это удаётся проделать вручную и получить матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую равенству $Q^2 = 5\,I_6$ (этот же пример приведён в [1]).

При $m = 8$ можно с помощью компьютерной программы перебирать элементы $Q_{ij} = \pm 1$, $i \in 2:7$, $j \in i+1:8$. Всего 21 элемент и 2^{21} комбинаций ± 1. Полный перебор приводит к выводу, что сигнатурной матрицы, удовлетворяющей равенству $Q^2 = 7\,I_8$, не существует, и, следовательно, не существует равноугольного жёсткого фрейма при $n = 4$, $m = 8$.

При $m = 10$ программа нашла сигнатурную матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую равенству $Q^2 = 9\,I_{10}$. Далее с помощью компьютерной системы Maple 9.5 проводим символьные вычисления, указанные в доказательстве теоремы 1: строим матрицу $G = I_{10} + c\,Q$, находим её ортогональное разложение $G = P^T \Lambda\, P$, строим матрицу Φ размера 5×10:

$$\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 10\sqrt{3} & -10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{30} & 2\sqrt{30} & -2\sqrt{30} & 2\sqrt{30} & 3\sqrt{30} & -3\sqrt{30} & -\sqrt{30} & 5\sqrt{30} & 0 & 0 \\ 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 20\sqrt{2} & 0 \\ 10 & 10 & 10 & -10 & 10 & -10 & 10 & -10 & -10 & 30 \end{bmatrix}.$$

С помощью Maple 9.5 легко проверяются равенства $\Phi\,\Phi^T = 2I_5$ и $\Phi^T\Phi = G$. Тем самым столбцы матрицы Φ образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^5$.

Точно так же программа нашла сигнатурные матрицы при $m = 14$ и $m = 18$, а с помощью Maple 9.5 построены равноугольные жёсткие фреймы в $\mathbb{R}^7$ и $\mathbb{R}^9$.

5°. Необходимое условие существования равноугольного жёсткого фрейма при $m = 2n$. Это условие установлено в работе [3].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $n \geqslant 2$, $m = 2n$. Если существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{R}^n$, то n — нечётное и $m-1$ является суммой двух квадратов целых чисел.*

В качестве иллюстрации приведём примеры.

При чётном $n = 4$ и $m = 8$ равноугольный жёсткий фрейм не существует.

При $n = 5, 7, 9$ числа $m - 1 = 2n - 1$ являются суммами квадратов двух целых чисел:

$$9 = 3^2 + 0^2, \quad 13 = 3^2 + 2^2, \quad 17 = 4^2 + 1^2.$$

В случаях $(5,10)$, $(7,14)$, $(9,18)$ существование равноугольных жёстких фреймов подтверждается расчётами (см. п. 4).

При $n = 11$, $m = 22$ число $m - 1 = 21$ не представимо в виде суммы двух квадратов и в этом случае по теореме 2 равноугольного жёсткого фрейма не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holmes R. B., Paulsen V. I. *Optimal frames for erasures* // Linear Algebra Appl. 2004. V. 377. P. 31–51.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные системы векторов и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0918`).

3. Sustik M. A., Tropp J. A., Dhillon I. S., Heath R. W. *On the existence of equiangular tight frames* // Linear Algebra Appl. 2007. V. 426. P. 619–635.