ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА В СЛУЧАЕ УТРАТЫ ОДНОГО ФРЕЙМОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА*

М. Н. Истомина

istomina@syktsu.ru

28 марта 2007 г.

1°. Напомним [1], что системой Мерседес-Бенц называется набор единичных n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$, удовлетворяющих условию

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\frac{1}{n} \qquad \text{при } i \neq j. \tag{1}$$

Система Мерседес-Бенц является жёстким фреймом с константой фрейма $A = 1 + \frac{1}{n}$, поэтому любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$x = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} c_i \, \varphi_i \,, \tag{2}$$

где коэффициенты c_i находятся по формуле

$$c_i = \langle x, \varphi_i \rangle, \qquad i \in 1 : n+1.$$

Обычно вместо сигнала x по каналам связи передаются коэффициенты его разложения. При передаче часть коэффициентов может потеряться. Допустим, что утрачен один коэффициент c_k с некоторым номером $k \in 1 : n+1$. Это равносильно тому, что из системы $\{\varphi_i\}$ удалили вектор φ_k и получили систему

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{n+1}\}. \tag{3}$$

От разложения (2) можно перейти к разложению по системе (3). Вывод формул для коэффициентов нового разложения является основной целью доклада.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

2°. Рассмотрим матрицу Грама системы (3). Так как скалярные произведения различных векторов системы равны $-\frac{1}{n}$ и норма каждого вектора равна единице, то матрица Грама имеет вид

$$G = \bigl\{\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\bigr\}_{i\neq k,\, j\neq k} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & \ldots & -\frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что эта матрица от k не зависит. В [1] указан явный вид обратной матрицы

$$G^{-1} = \frac{n}{n+1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(Легко проверить, что $G\,G^{-1} = I_n$, где I_n — единичная матрица порядка n.) Отсюда, в частности, следует, что матрица G невырождена, система (3) линейно независима и существует биортогональная система

$$\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{k-1}, \widetilde{\varphi}_{k+1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{n+1}\}. \tag{5}$$

Биортогональность означает, что

$$\langle\varphi_i, \widetilde{\varphi}_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Разложение вектора x по биортогональной системе (5) выглядит так:

$$x = \sum_{i\neq k} \langle x, \varphi_i\rangle\, \widetilde{\varphi}_i = \sum_{i\neq k} c_i\, \widetilde{\varphi}_i\,. \tag{6}$$

3°. Введём матрицы, столбцами которых являются векторы систем (3) и (5):

$$\varPhi_k = \bigl[\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{n+1}\bigr],$$
$$\widetilde{\varPhi}_k = \bigl[\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{k-1}, \widetilde{\varphi}_{k+1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{n+1}\bigr].$$

В силу биортогональности $\varPhi_k^T\widetilde{\varPhi}_k = I_n$, так что $\widetilde{\varPhi}_k = \bigl(\varPhi_k^T\bigr)^{-1}$. Это значит, что построение биртогональной системы равносильно обращению матрицы $\varPhi_k^T$.

По определению матрицы Грама $G = \varPhi_k^T\varPhi_k$. Отсюда следует, что $\varPhi_k^T = G\,\varPhi_k^{-1}$. Для $\widetilde{\varPhi}_k$ получаем представление $\widetilde{\varPhi}_k = \varPhi_k G^{-1}$.

Обозначим $\widetilde{c}^{(k)} = (c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_{n+1})$ и перепишем формулу (6) в компактном виде

$$x = \widetilde{\Phi}_k\, \widetilde{c}^{(k)} = \Phi_k\big(G^{-1}\, \widetilde{c}^{(k)}\big). \tag{7}$$

Согласно (4), компоненты вектора $c^{(k)} = \frac{n+1}{n}\, G^{-1}\, \widetilde{c}^{(k)}$ можно вычислить по схеме

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{i=1}^{k-1} c_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} c_i\,, \\ c_i^{(k)} &= c_i + s_k, \qquad i \in 1:n+1, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{8}$$

Остаётся развернуть формулу (7):

$$x = \frac{n}{n+1} \sum_{i \neq k} c_i^{(k)} \varphi_i\,. \tag{9}$$

Подведём итог.

ТЕОРЕМА. *Разложение* (2) *произвольного вектора* $x \in \mathbb{R}^n$ *по системе Мерседес-Бенц порождает при любом* $k \in 1:n+1$ *разложение* (9), *в котором коэффициенты* $c_i^{(k)}$ *вычисляются по схеме* (8).

4°. Приведём пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ фрейм Мерседес-Бенц [1]

$$\varphi_1 = \big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\big), \quad \varphi_2 = \big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\big), \quad \varphi_3 = \big(0, 1\big).$$

Возьмём вектор $x = (0, -1)$. Для него $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -1$. Допустим, что коэффициент c_3 утерян ($k = 3$). Тогда

$$s_3 = 1, \quad c_1^{(3)} = \tfrac{3}{2}\,, \quad c_2^{(3)} = \tfrac{3}{2}\,.$$

По теореме должно выполняться равенство

$$x = \tfrac{2}{3}\,\big(\tfrac{3}{2}\,\varphi_1 + \tfrac{3}{2}\,\varphi_2\big) = \varphi_1 + \varphi_2\,,$$

что на самом деле имеет место.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Секция «Дискретный гармонический анализ». Избранные доклады. 16 января 2007 г. `http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0116`