ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ФРЕЙМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

25 марта 2009 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из [1].

1°. Пусть $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ — фрейм Мерседес-Бенц в $\mathbb{R}^n$ [2]. Здесь и далее верхний индекс указывает на размерность вектора.

Возьмём ненулевой вектор a^n и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} F(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1}) \to \min \\ \frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\, b_j^n = a^n. \end{gathered} \tag{1}$$

Приведём конструктивный способ сведения задачи (1) к одномерной задаче безусловной минимизации.

2°. Напомним [2], что фреймы Мерседес-Бенц определяются рекуррентно:

$$\begin{gathered} b_1^1 = -1, \quad b_2^1 = 1\,; \\ b_j^k = \begin{pmatrix} c_k\, b_j^{k-1} \\ -1/k \end{pmatrix}, \ \ j \in 1:k\,; \quad b_{k+1}^k = (0,\dots,0,1)^T; \quad k = 2,3,\dots,n\,, \end{gathered} \tag{2}$$

где $c_k = \sqrt{k^2-1}/k$. При этом

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_j^n = \mathbb{O}\,, \tag{3}$$

$$\frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\langle a^n, b_j^n\rangle\, b_j^n = a^n.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В частности, вектор ξ_*^{n+1} с компонентами $\xi_*^{n+1}(j) = \langle a^n, b_j^n \rangle$ является планом задачи (1).

Найдём множество решений однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \, b_j^n = \mathbb{O}. \tag{4}$$

Ранг матрицы системы (4) равен n, поскольку подматрица, составленная из столбцов $b_2^n, \dots, b_{n+1}^n$, — нижнетреугольная с положительными диагональными элементами. Значит, множество решений системы (4) одномерно. Вектор ξ_0^{n+1} с компонентами $\xi_0^{n+1}(j) = 1$ согласно (3) удовлетворяет системе (4). Следовательно, множество решений системы (4) имеет вид $\xi^{n+1} = \lambda \, \xi_0^{n+1}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Множество планов задачи (1) допускает представление

$$\xi^{n+1} = \xi_*^{n+1} + \lambda \, \xi_0^{n+1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Сама задача (1) сводится к одномерной задаче безусловной минимизации

$$f(\lambda) := F\big(\xi_*^{n+1} + \lambda \, \xi_0^{n+1}\big) \to \min_{\lambda \in \mathbb{R}}. \tag{5}$$

3°. Покажем, как вычислять компоненты вектора ξ_*^{n+1}.

Введём обозначения $a^k = (a_1, \dots, a_k)^T$; $\xi_*^{k+1}(j) = \langle a^k, b_j^k \rangle$, $j \in 1 : k+1$.

ЛЕММА. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\begin{gathered} \xi_*^{k+1}(j) = c_k \, \xi_*^k(j) - \tfrac{1}{k} \, a_k \,, \quad j \in 1 : k \,; \quad \xi_*^{k+1}(k+1) = a_k \,; \quad k = 2, 3, \dots, n \,; \\ \xi_*^2(1) = -a_1 \,, \quad \xi_*^2(2) = a_1 \,. \end{gathered} \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидным образом следует из (2).

Вычисление вектора ξ_*^{n+1} по формуле (6) можно осуществить в одном массиве («на месте»). В начальный момент (при $k = 1$) массив заполнен так: $(-a_1, a_1, a_2, \dots, a_n)$.

4°. Рассмотрим три частных случая задачи (5). Предварительно упростим обозначение

$$\xi_j^* = \xi_*^{n+1}(j) \,, \quad j \in 1 : n+1 \,.$$

Отметим, что

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^* = 0 \,. \tag{7}$$

Действительно, согласно (3)

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j^* = \sum_{j=1}^{n+1} \langle a^n, b_j^n \rangle = \Big\langle a^n, \sum_{j=1}^{n+1} b_j^n \Big\rangle = 0\,.$$

Пусть

$$f_0(\lambda) = \left\| \xi_*^{n+1} + \lambda\, \xi_0^{n+1} \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\lambda + \xi_j^* \right)^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Минимум функции $f_0(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ достигается в единственной точке $\lambda = 0$.*

Доказательство следует из (7).

Таким образом, среди разложений вектора a^n по фрейму Мерседес-Бенц фреймовые коэффициенты $\xi_j^* = \langle a^n, b_j^n \rangle$, $j \in 1 : n+1$, образуют вектор с наименьшей l_2-нормой.

5°. Пусть теперь

$$f_1(\lambda) = \left\| \xi_*^{n+1} + \lambda\, \xi_0^{n+1} \right\|_1 = \sum_{j=1}^{n+1} \left| \lambda + \xi_j^* \right|.$$

Мы хотим найти разложение вектора a^n по фрейму Мерседес-Бенц с наименьшей l_1-нормой вектора коэффициентов разложения.

Упорядочим числа $(-\xi_j^*)$ по неубыванию. Полученную последовательность обозначим $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n+1}$. Очевидно, что

$$f_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \left| \lambda - \lambda_j \right|.$$

При этом согласно (7)

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 0\,.$$

Функция $f_1(\lambda)$ является выпуклой ломаной. При $\lambda \leqslant \lambda_1$ имеем

$$f_1(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n+1} \left(\lambda - \lambda_j \right) = -\left(n+1 \right) \lambda\,.$$

Аналогично при $\lambda \geqslant \lambda_{n+1}$

$$f_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\lambda - \lambda_j \right) = \left(n+1 \right) \lambda\,.$$

Пусть $\lambda \in [\lambda_s, \lambda_{s+1}]$. Тогда

$$f_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{s} \big(\lambda - \lambda_j\big) - \sum_{j=s+1}^{n+1} \big(\lambda - \lambda_j\big)\,.$$

В частности,

$$f_1(\lambda_{s+1}) - f_1(\lambda_s) = s\,\big(\lambda_{s+1} - \lambda_s\big) - \big(n+1-s\big)\big(\lambda_{s+1} - \lambda_s\big) =$$
$$= \big(2s - n - 1\big)\big(\lambda_{s+1} - \lambda_s\big)\,.$$

При нечётном n положим $s_0 = \frac{n+1}{2}$. Ясно, что на множестве $(-\infty, \lambda_{s_0}]$ функция $f_1(\lambda)$ строго убывает, а на множестве $[\lambda_{s_0+1}, +\infty)$ строго возрастает. Если $\lambda_{s_0+1} = \lambda_{s_0}$, то $\lambda^* = \lambda_{s_0}$ — единственная точка минимума $f_1(\lambda)$ на $\mathbb{R}$. Если же $\lambda_{s_0+1} > \lambda_{s_0}$, то множество точек минимума совпадает с отрезком $[\lambda_{s_0}, \lambda_{s_0+1}]$.

При чётном n положим $s_0 = \frac{n+2}{2}$. В этом случае функция $f_1(\lambda)$ строго убывает на $(-\infty, \lambda_{s_0}]$ и строго возрастает на $[\lambda_{s_0}, +\infty)$. Единственной точкой минимума будет $\lambda^* = \lambda_{s_0}$.

Подведём итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Минимум функции $f_1(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ достигается в точке $\lambda^* = \lambda_{s_0}$, где $s_0 = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$. Это единственная точка минимума при чётном n. При нечётном n она единственна, когда $\lambda_{s_0} = \lambda_{s_0+1}$. Если же $\lambda_{s_0} < \lambda_{s_0+1}$, то множество точек минимума совпадает с отрезком $[\lambda_{s_0}, \lambda_{s_0+1}]$.*

Отметим, что план $\xi^{n+1} = \xi_*^{n+1} + \lambda^* \xi_0^{n+1}$ задачи (1) имеет наименьшую l_1-норму. При этом хотя бы одна компонента этого плана равна нулю.

6°. Согласно (3) при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ справедлива формула

$$a^n = \frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \big[\langle a^n, b_j^n\rangle + \lambda\big]\, b_j^n\,.$$

Это значит, что в разложении вектора a^n по фрейму Мерседес-Бенц можно обеспечить равенство нулю любого коэффициента.

7°. В случае, когда целевая функция имеет вид

$$f_2(\lambda) = \max_{j \in 1:n+1} |\lambda + \xi_j^*| = \max_{j \in 1:n+1} |\lambda - \lambda_j|\,,$$

справедливо следующие очевидное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Минимум функции $f_2(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ достигается в единственной точке $\lambda_* = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n+1})$.*

План $\xi^{n+1} = \xi_*^{n+1} + \lambda_* \xi_0^{n+1}$ задачи (1) имеет наименьшую чебышёвскую норму.

8°. К теме доклада примыкает работа [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. Я., Рябцов И. С. *Оптимизация фреймовых представлений для сжатого зондирования МВ-фрейма.* 2009. 12 с. Препринт.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные жёсткие фреймы* // Проблемы матем. анализа. Вып. 39, 2009. С. 3–25.

3. Donoho D. L. *Compressed sensing* // IEEE Trans. Inf. Theory. 2006. V. 52(4). P. 1289–1306.