О МАТРИЦЕ ФРЕЙМА*

В. Н. Малозёмов   Н. А. Соловьёва

malv@math.spbu.ru   vinyo@mail.ru

20 мая 2009 г.

Доклад подготовлен на основе статьи [1].

1°. Напомним, что система ненулевых векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ называется фреймом, если эрмитова матрица $S = \Phi\Phi^*$, где Φ — матрица со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, положительно определена. Матрица S называется матрицей фрейма.

Отметим, что

$$\Phi\Phi^* = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j\, \varphi_j^*\,,$$

поэтому матрица фрейма S не меняется при перестановке векторов φ_j. Обозначим $a_j = \|\varphi_j\|$ и будем считать, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m > 0\,.$$

Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ — собственные числа матрицы S и $v_1, v_2, \dots, v_n$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы соотношения*

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,; \qquad \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \quad \text{при всех } k \in 1:n\,. \tag{1}$$

Доказательство. Равенство в (1) проверяется просто. Обозначим через $\mathrm{tr}(S)$ след матрицы S. Имеем

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(\Phi\Phi^*) = \mathrm{tr}(\Phi^*\Phi) = \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Обратимся к неравенствам. Зафиксируем $k \in 1:n$ и обозначим через $\mathcal{L}$ линейную оболочку векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Построим в $\mathcal{L}$ ортонормированный базис $\psi_1, \ldots, \psi_s$, где $s \leqslant k$, и дополним его векторами $\psi_{s+1}, \ldots, \psi_n$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим через Ψ матрицу со столбцами $\psi_1, \ldots, \psi_s$ и положим $P = \Psi\,\Psi^*$. При всех $x \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$Px = \sum_{i=1}^{s} \langle x, \psi_i \rangle\, \psi_i\,. \tag{2}$$

В частности,

$$P\varphi_j = \varphi_j\,, \qquad j \in 1:k\,. \tag{3}$$

Кроме того, при всех $j \in 1:m$ согласно (2)

$$\big\| P\varphi_j \big\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \big| \langle \varphi_j, \psi_i \rangle \big|^2\,. \tag{4}$$

Вычислим величину

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} \big\| P\varphi_j \big\|^2\,.$$

На основании (4) запишем

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s} \big| \langle \varphi_j, \psi_i \rangle \big|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s} \Big| \Big\langle \sum_{l=1}^{n} \langle \varphi_j, v_l \rangle\, v_l\,, \sum_{l'=1}^{n} \langle \psi_i, v_{l'} \rangle\, v_{l'} \Big\rangle \Big|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s} \Big| \sum_{l=1}^{n} \langle \varphi_j, v_l \rangle\, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} \Big|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{n}\sum_{l'=1}^{n} \langle \varphi_j, v_l \rangle\, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle}\; \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle}\, \langle \psi_i, v_{l'} \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{n} \big| \langle \varphi_j, v_l \rangle\, \langle \psi_i, v_l \rangle \big|^2\,.$$

Мы воспользовались тем, что при $l \neq l'$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{s} \langle \varphi_j, v_l \rangle\, \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle}\, \langle \psi_i, v_{l'} \rangle\, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, v_l \rangle\, \overline{\langle \varphi_j, v_{l'} \rangle} \Big) \Big(\sum_{i=1}^{s} \langle \psi_i, v_{l'} \rangle\, \overline{\langle \psi_i, v_l \rangle} \Big) = 0\,,$$

поскольку

$$\sum_{j=1}^{m}\langle\varphi_j, v_l\rangle\,\overline{\langle\varphi_j, v_{l'}\rangle} = \sum_{j=1}^{m}\langle v_{l'}, \varphi_j\rangle\,\overline{\langle v_l, \varphi_j\rangle} =$$
$$= \langle \varPhi^* v_{l'}, \varPhi^* v_l\rangle = \langle S\, v_{l'}, v_l\rangle = \lambda_{l'}\langle v_{l'}, v_l\rangle = 0\,.$$

Приходим к формуле

$$\sigma = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\bigl|\langle v_l, \varphi_j\rangle\bigr|^2\sum_{i=1}^{s}\bigl|\langle v_l, \psi_i\rangle\bigr|^2 = \sum_{l=1}^{n}\lambda_l\sum_{i=1}^{s}\bigl|\langle v_l, \psi_i\rangle\bigr|^2\,.$$

Обозначим

$$x_l = \sum_{i=1}^{s}\bigl|\langle v_l, \psi_i\rangle\bigr|^2\,.$$

Имеем

$$x_l \leqslant \sum_{i=1}^{n}\bigl|\langle v_l, \psi_i\rangle\bigr|^2 = \bigl\|v_l\bigr\|^2 = 1\,,$$
$$\sum_{l=1}^{n} x_l = \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{n}\bigl|\langle \psi_i, v_l\rangle\bigr|^2 = \sum_{i=1}^{s}\bigl\|\psi_i\bigr\|^2 = s\,.$$

Значит,

$$\sigma = \sum_{l=1}^{n}\lambda_l\, x_l\,,$$

где $0 \leqslant x_l \leqslant 1$ и $\sum\limits_{l=1}^{n} x_l = s$. Учитывая упорядоченность собственных чисел λ_l и равенство

$$\sum_{l=s+1}^{n} x_l = s - \sum_{l=1}^{s} x_l = \sum_{l=1}^{s}\bigl(1 - x_l\bigr)\,,$$

получаем,

$$\sigma \leqslant \sum_{l=1}^{s}\lambda_l\, x_l + \lambda_{s+1}\sum_{l=s+1}^{n} x_l = \sum_{l=1}^{s}\lambda_l - \sum_{l=1}^{s}\lambda_l\bigl(1 - x_l\bigr) + \lambda_{s+1}\sum_{l=1}^{s}\bigl(1 - x_l\bigr) =$$
$$= \sum_{l=1}^{s}\lambda_l - \sum_{l=1}^{s}\bigl(\lambda_l - \lambda_{s+1}\bigr)\bigl(1 - x_l\bigr) \leqslant \sum_{l=1}^{s}\lambda_l\,. \qquad (5)$$

Теперь доказательство требуемого неравенства заканчивается просто. Согласно (3) и (5)

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \|\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \|P\varphi_j\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|P\varphi_j\|^2 =$$
$$= \sigma \leqslant \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \leqslant \sum_{l=1}^{k} \lambda_l\,.$$

□

2°. Предложение 1 допускает обращение в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть S — произвольная эрмитова положительно определённая матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ и соответствующими ортонормированными собственными векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$. Возьмём положительные числа $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m > 0$, где $m \geqslant n$. Если выполняются соотношения (1), то в $\mathbb{C}^n$ существует фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, такой, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1 : m$ и матрица S является матрицей этого фрейма.*

Доказательству предложения 2 предпошлём вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Пусть заданы вещественные числа $\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m$ и $a_1, \dots, a_m$, причём $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m > 0$. Введём диагональную матрицу $\widehat{\Lambda} = \mathrm{diag}(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_m)$. Если выполнены условия*

$$\sum_{l=1}^{m} \widehat{\lambda}_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,; \qquad \sum_{l=1}^{k} \widehat{\lambda}_l \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \quad \text{при всех } k \in 1 : m-1\,, \tag{6}$$

то существует ортогональная матрица Q, такая, что у матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, \dots, a_m^2$.

Доказательство леммы отложим до следующего пункта и сразу перейдём к доказательству предложения 2.

Запишем спектральное разложение матрицы S,

$$S = V\Lambda V^*,$$

где V — матрица со столбцами $v_1, \dots, v_n$ и $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Введём матрицу G размера $n \times m$,

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем $G\,G^T = \Lambda$ и $G^T G = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots, 0) =: \widehat{\Lambda}$. Обозначим $\widehat{\lambda}_l = \lambda_l$, $l \in 1:n$; $\widehat{\lambda}_l = 0$, $l \in n+1:m$. Тогда $\widehat{\Lambda} = \operatorname{diag}(\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m)$.

Для чисел $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ и $a_1, \ldots, a_m$ выполняются условия леммы. Действительно, согласно (1)

$$\sum_{l=1}^{m} \widehat{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\,;$$

при $k \in 1:n$

$$\sum_{l=1}^{k} \widehat{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2$$

и при $k \in n+1:m-1$

$$\sum_{l=1}^{k} \widehat{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2\,.$$

По лемме существует ортогональная матрица Q, такая, что у матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, \ldots, a_m^2$.

Положим

$$\varPhi = V G\, Q^T$$

и обозначим через $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ столбцы матрицы $\varPhi$. Имеем

$$\varPhi\varPhi^* = V G\, Q^T Q\, G^T V^* = V G\, G^T V^* = V \Lambda\, V^* = S\,.$$

Учитывая свойства матрицы S, заключаем, что $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — фрейм в $\mathbb{C}^n$ и S — матрица этого фрейма. При этом

$$\varPhi^*\varPhi = Q\, G^T V^* V G\, Q^T = Q\, G^T G\, Q^T = Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T.$$

Значит, на диагонали матрицы $\varPhi^*\varPhi$ стоят числа $a_1^2, \ldots, a_m^2$, а это равносильно тому, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1:m$.

Предложение 2 доказано.

3°. Докажем лемму.

Воспользуемся индукцией по m. При $m = 2$ условия (6) принимают вид

$$\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 = a_1^2 + a_2^2\,, \qquad \widehat{\lambda}_1 \geqslant a_1^2\,. \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$a_1^2 - \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1 - a_2^2 \geqslant \widehat{\lambda}_1 - a_1^2 \geqslant 0\,.$$

Значит, $\widehat{\lambda}_1 \geqslant a_1^2 \geqslant \widehat{\lambda}_2$. В частности, $\widehat{\lambda}_1 \geqslant \widehat{\lambda}_2$.

Сначала рассмотрим случай $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_2$. Выберем параметр $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ так, чтобы

$$\sin t = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}}\,, \qquad \cos t = \sqrt{\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}}\,.$$

Введём ортогональную матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Получим

$$Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\lambda}_1 \cos t & -\widehat{\lambda}_1 \sin t \\ \widehat{\lambda}_2 \sin t & \widehat{\lambda}_2 \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & b \\ b & a_2^2 \end{bmatrix},$$

где $b = -\sqrt{(\widehat{\lambda}_1 - a_1^2)\,(a_1^2 - \widehat{\lambda}_2)}$. Действительно,

$$\widehat{\lambda}_1 \cos^2 t + \widehat{\lambda}_2 \sin^2 t = \widehat{\lambda}_1 \left(\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) = a_1^2\,,$$

$$\widehat{\lambda}_1 \sin^2 t + \widehat{\lambda}_2 \cos^2 t = \widehat{\lambda}_1 \left(\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2}\right) = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - a_1^2 = a_2^2\,.$$

Таким образом, на диагонали матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ стоят числа a_1^2, a_2^2.

Перейдём к случаю $\widehat{\lambda}_1 = \widehat{\lambda}_2$. В силу (7)

$$a_1^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \leqslant 2\widehat{\lambda}_1 - a_1^2 = a_2^2 \leqslant a_1^2\,.$$

Значит, $a_1^2 = a_2^2 = \widehat{\lambda}_1 = \widehat{\lambda}_2$. Достаточно взять $Q = I_2$.

Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m. Согласно (6), $\widehat{\lambda}_1 \geqslant a_1^2$. Допустим, что $\widehat{\lambda}_l \geqslant a_1^2$ при всех $l \in 1:m$. Тогда

$$m a_1^2 \leqslant \sum_{l=1}^{m} \widehat{\lambda}_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \leqslant m a_1^2\,.$$

Отсюда следует, что $a_1^2 = \cdots = a_m^2 = \widehat{\lambda}_1 = \cdots = \widehat{\lambda}_m$. Достаточно взять $Q = I_m$.

Остаётся предположить, что существует $s \in 2:m$, такое, что

$$\widehat{\lambda}_s < a_1^2\,; \qquad \widehat{\lambda}_l \geqslant a_1^2 \quad \text{при } l \in 1:s-1\,. \tag{8}$$

Покажем, что для чисел $\widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_{s-1}, \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2, \widehat{\lambda}_{s+1}, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ и $a_2, \ldots, a_m$ выполняются условия, аналогичные (6). Имеем

$$\widehat{\lambda}_2 + \cdots + \widehat{\lambda}_{s-1} + \big(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2\big) + \widehat{\lambda}_{s+1} + \cdots + \widehat{\lambda}_m = a_2^2 + \cdots + a_m^2\,;$$

при $k \in 1 : s-1$

$$\widehat{\lambda}_2 + \dots + \widehat{\lambda}_k \geqslant (k-1)\, a_1^2 \geqslant (k-1)\, a_2^2 \geqslant a_2^2 + \dots + a_k^2\,;$$

при $k \in s : m-1$

$$\begin{gathered} \widehat{\lambda}_2 + \dots + \widehat{\lambda}_{s-1} + \bigl(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2\bigr) + \widehat{\lambda}_{s+1} + \dots + \widehat{\lambda}_k = \\ = \widehat{\lambda}_1 + \dots + \widehat{\lambda}_k - a_1^2 \geqslant a_2^2 + \dots + a_k^2\,. \end{gathered}$$

Обозначим $\widehat{\Lambda}_1 = \mathrm{diag}(\widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{s-1}, \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2, \widehat{\lambda}_{s+1}, \dots, \widehat{\lambda}_m)$. По индукционному предположению найдётся ортогональная матрица Q_1 порядка $m-1$, такая, что у матрицы $Q_1\, \widehat{\Lambda}_1\, Q_1^T$ на диагонали стоят числа $a_2^2, \dots, a_m^2$.

Вернёмся к соотношениям (8). Выбор индекса s обеспечивает неравенство $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_s$. Найдём $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, исходя из условий

$$\sin t = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1 - a_1^2}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_s}}\,, \qquad \cos t = \sqrt{\frac{a_1^2 - \widehat{\lambda}_s}{\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_s}}\,. \tag{9}$$

Обозначим через Θ_s матрицу порядка s вида

$$\Theta_s = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \dots & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \dots & 0 & \cos t \end{bmatrix}$$

и положим

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_s & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что Θ — ортогональная матрица порядка m.

Нас интересует матрица

$$\begin{gathered} H = \Theta\, \widehat{\Lambda}\, \Theta^T = \begin{bmatrix} \Theta_s & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{bmatrix} \widehat{\Lambda} \begin{bmatrix} \Theta_s^T & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \Theta_s\, \widehat{\Lambda}[1:s, 1:s]\, \Theta_s^T & 0 \\ 0 & \widehat{\Lambda}[s+1:m, s+1:m] \end{bmatrix}. \end{gathered}$$

Покажем, что

$$H = \begin{bmatrix} a_1^2 & h^T \\ h & \widehat{\Lambda}_1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\widehat{\Lambda}_1$ — введённая выше диагональная матрица порядка $m-1$.

Согласно (9) имеем

$$H[1,1] = \widehat{\lambda}_1 \cos^2 t + \widehat{\lambda}_s \sin^2 t = a_1^2\,,$$

$$H[s,s] = \widehat{\lambda}_1 \sin^2 t + \widehat{\lambda}_s \cos^2 t = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_s - a_1^2\,.$$

Кроме того, очевидно, что $H[l,l] = \widehat{\lambda}_l$ при $l \in 2 : s-1$. Таким образом, на диагональных элементах равенство (10) выполняется. Остаётся проверить, что $H[l,j] = 0$ при $l, j \in 2 : s$, $l \neq j$. Это проверяется в два приёма: $H[l,j] = 0$ при $l \in 2 : s-1$, $j \in 2 : s$, $l \neq j$ и $H[s,j] = 0$ при $j \in 2 : s-1$. Отметим, что у $(m-1)$-мерного вектора h лишь одна компонента, возможно, отлична от нуля. Точнее,

$$H[1,s] = H[s,1] = -\sqrt{(\widehat{\lambda}_1 - a_1^2)\,(a_1^2 - \widehat{\lambda}_s)}\,.$$

Формула (10) установлена.

Рассмотрим ортогональную матрицу Q_0 порядка m,

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix},$$

где матрица Q_1, как и $\widehat{\Lambda}_1$, определена выше. Согласно (10) имеем

$$Q_0\,H\,Q_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 & h^T \\ h & \widehat{\Lambda}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & (Q_1\,h)^T \\ Q_1\,h & Q_1\,\widehat{\Lambda}_1\,Q_1^T \end{bmatrix}.$$

Видим, что у матрицы $Q_0\,H\,Q_0^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_m^2$. При этом

$$Q_0\,H\,Q_0^T = Q_0\,\Theta\,\widehat{\Lambda}\,\Theta^T\,Q_0^T\,.$$

Ортогональная матрица $Q = Q_0\,\Theta$ обладает тем свойством, что у матрицы $Q\,\widehat{\Lambda}\,Q^T$ на диагонали стоят числа $a_1^2, \ldots, a_m^2$.

Лемма доказана. □

4°. Приведём одно следствие из предложения 2. Напомним, что фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ называется равномерным, если $\|\varphi_1\| = \cdots = \|\varphi_m\|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть S — эрмитова положительно определённая матрица порядка n. Тогда при каждом $m \geqslant n$ в $\mathbb{C}^n$ существует равномерный фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, у которого матрица фрейма равна S.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n > 0$ — собственные числа матрицы S. Обозначим $A = \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_l$. Фиксируем $m \geqslant n$ и положим

$$a_j = \sqrt{\tfrac{A}{m}}, \qquad j \in 1:m\,.$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = A = \sum_{j=1}^{m} a_j^2$$

и при $k \in 1:n$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 = \frac{k}{m}\,A = k\,\frac{n}{m}\,\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l \leqslant k\,\frac{n}{m}\,\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \leqslant \sum_{l=1}^{k}\lambda_l\,.$$

Мы воспользовались тем, что в силу упорядоченности λ_l

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \geqslant \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\,. \tag{11}$$

Проверим это неравенство. Имеем

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \geqslant \lambda_{k+1} = \sum_{l=1}^{k+1}\lambda_l - \sum_{l=1}^{k}\lambda_l\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \geqslant \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}\lambda_l\,.$$

Продолжив аналогично, придём к (11).

Показано, что для чисел $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n > 0$ и $a_1 = \dots = a_m = \sqrt{\frac{A}{m}}$ условия предложения 2 выполнены. Согласно этому предложению требуемый фрейм существует. $\square$

5°. Сформулируем аналоги предложений 1 и 2 для жёстких фреймов, у которых по определению $\lambda_1 = \dots = \lambda_n =: \lambda > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ — жёсткий фрейм в $\mathbb{C}^n$ с константой фрейма λ и $a_j = \|\varphi_j\|$, причём $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_m > 0$. Тогда*

$$n\,\lambda = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \quad \text{и} \quad \lambda \geqslant a_1^2\,. \tag{12}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть заданы натуральное число* $n \geqslant 2$ *и вещественное* $\lambda > 0$. *При* $m \geqslant n$ *возьмём числа* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m > 0$, *удовлетворяющие условиям* (12). *Тогда в* $\mathbb{C}^n$ *существует жёсткий фрейм* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ *с константой фрейма* λ, *такой, что* $\|\varphi_j\| = a_j$ *при* $j \in 1 : m$.

Отметим, что из неравенства $\lambda \geqslant a_1^2$ следует, что при всех $k \in 1 : n$

$$k\,\lambda \geqslant k\,a_1^2 \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j^2\,.$$

З а м е ч а н и е. По ходу доказательства предложения 2 было установлено, что требуемый фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ состоит из столбцов матрицы $\Phi = V G\, Q^T$, где матрицы G и Q зависят только от чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $a_1, \dots, a_m$, а унитарная матрица V участвует в спектральном разложении матрицы S, $S = V \Lambda V^*$. В случае жёсткого фрейма $S = \lambda\, I_n$, так что в качестве V можно взять любую унитарную матрицу порядка n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Casazza P. G., Leon M. T. *Frames with a given frame operator.* 2002. Preprint.