ФРЕЙМ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

В. Н. Малозёмов   А. Б. Певный

malv@math.spbu.ru   pevnyi@syktsu.ru

16 января 2007 г.

В докладе представлен усовершенствованный вариант результатов из [1, 2].

1°. Напомним [3, с. 99–100], что жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$ называется семейство из $m \geqslant n$ векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$, такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \bigl|\langle x, \varphi_j\rangle\bigr|^2 = A\,\|x\|^2, \tag{1}$$

где $A > 0$ — некоторая константа (константа фрейма). Нас интересует случай $m = n + 1$.

В $\mathbb{R}^2$ жёсткий фрейм образуют векторы

$$b_1^2 = \bigl(0, 1\bigr), \qquad b_2^2 = \Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Bigr), \qquad b_3^2 = \Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Bigr) \tag{2}$$

(верхний индекс указывает на размерность вектора). Для них

$$\sum_{j=1}^{3} \bigl|\langle x, b_j^2\rangle\bigr|^2 = \frac{3}{2}\,\|x\|^2.$$

Отметим также, что

$$\sum_{j=1}^{3} b_j^2 = \mathbb{O}; \qquad \langle b_j^2, b_k^2\rangle = -\frac{1}{2} \qquad \text{при } k \neq j.$$

В [4] жёсткий фрейм (2) назван *фреймом Мерседес-Бенц*. Покажем, что аналогичные фреймы существуют в $\mathbb{R}^n$ при любом $n \geqslant 2$.

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

2°. Начнём со вспомогательного утверждения.

ЛЕММА. *При $n \geqslant 2$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно построить систему из $n+1$ единичных векторов $\{b_1^n, b_2^n, \dots, b_{n+1}^n\}$ со свойством*

$$\langle b_j^n, b_k^n\rangle = -\frac{1}{n} \qquad \textit{при } k \neq j. \tag{3}$$

Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 2$ система (2) обладает требуемым свойством. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n.

Допустим, что система $\{b_j^{n-1}\}_{j=1}^n$ уже построена. Согласно индукционному предположению

$$\|b_j^{n-1}\| = 1\,; \qquad \langle b_j^{n-1}, b_k^{n-1}\rangle = -\frac{1}{n-1} \qquad \text{при } k \neq j. \tag{4}$$

Переходя к построению системы $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$, полагаем $b_{n+1}^n = (0, \dots, 0, 1)$. Векторы b_j^n при $j \in 1:n$ будем искать в виде

$$b_j^n = c_n\,\bigl(b_j^{n-1}, -h_n\bigr).$$

Константу c_n выберем из условия нормировки

$$1 = \|b_j^n\|^2 = c_n^2\,(1 + h_n^2).$$

Отсюда

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{1+h_n^2}}\,. \tag{5}$$

За счёт h_n нужно обеспечить выполнение условий (3).

Имеем

$$\langle b_j^n, b_k^n\rangle = \begin{cases} c_n^2\,\bigl(\langle b_j^{n-1}, b_k^{n-1}\rangle + h_n^2\bigr) & \text{при } j,k \in 1:n,\ k \neq j; \\ -c_n\,h_n & \text{при } j \in 1:n,\ k = n+1. \end{cases}$$

На основании (4) приходим к уравнениям

$$c_n^2\left(h_n^2 - \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{1}{n}\,, \qquad c_n\,h_n = \frac{1}{n}\,. \tag{6}$$

Из второго уравнения и (5) следует, что $h_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$. При этом $c_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$. Первое равенство в (6) выполняется автоматически!

Лемма доказана. $\square$

Сумма построенных векторов $b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{n+1}^n$ равна нулю. Действительно, согласно (3)

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n+1} b_j^n \Big\|^2 = \sum_{j,k} \langle b_j^n, b_k^n \rangle = (n+1) + \sum_{k \neq j} \langle b_j^n, b_k^n \rangle = $$
$$= (n+1) - \frac{1}{n} \Big[(n+1)^2 - (n+1) \Big] = 0\,.$$

Более принципиальным является следующее свойство.

ТЕОРЕМА 1. *Система векторов $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ образует жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$ с константой $A = 1 + \frac{1}{n}$.*

Доказательство. Рассмотрим первые n векторов $b_1^n, \ldots, b_n^n$. Их матрица Грама G_n с элементами $\langle b_j^n, b_k^n \rangle$ имеет вид

$$G_n = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Диагональное преобладание гарантирует невырожденность G_n. Более того, как нетрудно проверить,

$$G_n^{-1} = \frac{n}{n+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{bmatrix}.$$

Значит, векторы $b_1^n, \ldots, b_n^n$ линейно независимы.

Возьмём вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $\{b_j^n\}_{j=1}^n$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, b_j^n\,.$$

Для квадрата нормы получим формулу

$$\|x\|^2 = \sum_{j,k} x_j\, x_k\, \langle b_j^n, b_k^n \rangle = \sum_{j,k} G_n[j,k]\, x_j\, x_k\,. \tag{7}$$

Вместе с тем,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \big| \langle x, b_i^n \rangle \big|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j\, \langle b_j^n, b_i^n \rangle \Big|^2 + + \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j\, \langle b_j^n, b_{n+1}^n \rangle \Big|^2 =: S_1 + S_2\,. \tag{8}$$

Преобразуем S_1 и S_2. Запишем

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \, \langle b_j^n, b_i^n \rangle \sum_{k=1}^{n} x_k \, \langle b_k^n, b_i^n \rangle =$$

$$= \sum_{j,\,k} x_j \, x_k \sum_{i=1}^{n} \langle b_j^n, b_i^n \rangle \langle b_k^n, b_i^n \rangle.$$

Последнюю сумму (по i) обозначим через d_{jk}. Ясно, что

$$d_{jk} = \begin{cases} 1 + \frac{n-1}{n^2} & \text{при } k = j, \\ -\frac{2}{n} + \frac{n-2}{n^2} & \text{при } k \neq j, \end{cases}$$

или $d_{jk} = (1 + \frac{1}{n}) \, G_n[j,k] - \frac{1}{n^2}$. Далее

$$S_2 = \frac{1}{n^2} \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j \Big|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j,\,k} x_j \, x_k \,.$$

Теперь сложим S_1 и S_2:

$$S_1 + S_2 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big) \sum_{j,\,k} G_n[j,k] \, x_j \, x_k \,.$$

Вспоминая формулы (7) и (8), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{n+1} \big| \langle x, b_i^n \rangle \big|^2 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big) \|x\|^2.$$

Теорема доказана. $\square$

Фрейм $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ назовём *фреймом Мерседес-Бенц.*

3°. Систему $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ единичных n-мерных векторов будем называть *системой Мерседес-Бенц*, если выполняется условие

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = -\frac{1}{n} \qquad \text{при } k \neq j. \tag{9}$$

Лемма показывает, что системы Мерседес-Бенц существуют. Более того, любая такая система является жёстким фреймом с константой $A = 1 + \frac{1}{n}$. Это следует из доказательства теоремы 1, в котором использовались только нормированность векторов b_j^n и условие (3).

ТЕОРЕМА 2. *Системы Мерседес-Бенц и только они доставляют максимум функционалу*

$$S(\mathrm{Z}) = \sum_{k \neq j} \left\| \zeta_j - \zeta_k \right\|$$

среди всех систем $\mathrm{Z} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}\}$ *единичных n-мерных векторов.*

Доказательство. Возьмём систему Мерседес-Бенц $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ и обозначим $s_{jk} = \|\varphi_j - \varphi_k\|$. Согласно (9) при $k \neq j$ имеем

$$s_{jk}^2 = 2 - 2\,\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Количество s_{jk} при $k \neq j$ равно $(n+1)^2 - (n+1) = n\,(n+1)$, поэтому

$$S(\Phi) = n\,(n+1)\sqrt{2\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)} = (n+1)\sqrt{2n\,(n+1)}\,.$$

Отметим, что правая часть последнего равенства одинакова для всех систем Мерседес-Бенц.

Теперь нужно показать, что

$$S(\mathrm{Z}) < (n+1)\sqrt{2n\,(n+1)}$$

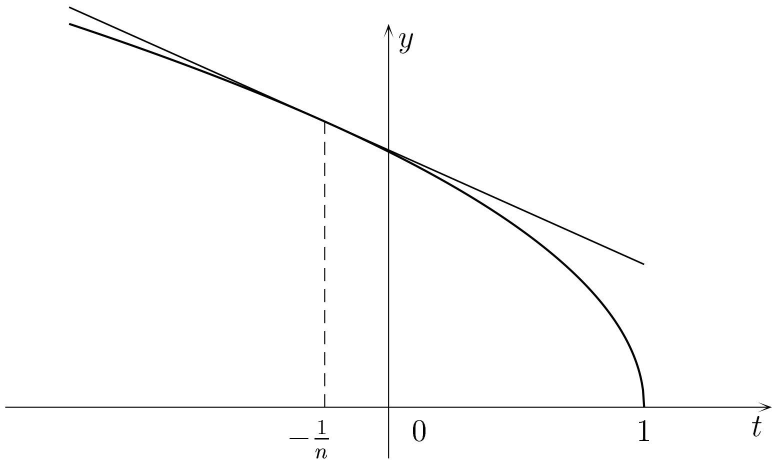
для любой системы $\mathrm{Z} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}\}$ единичных n-мерных векторов, у которой хотя бы одно скалярное произведение $\langle \zeta_j, \zeta_k \rangle$ при $k \neq j$ отлично от $-\frac{1}{n}$.

Воспользуемся идеей из [5]. Запишем

$$\left\| \zeta_j - \zeta_k \right\| = \sqrt{2}\, y\big(\langle \zeta_j, \zeta_k \rangle\big),$$

где $y(t) = \sqrt{1-t}$. Поскольку $y''(t) < 0$ при $t < 1$, то функция $y(t)$ строго вогнута на $(-\infty, 1]$. Проведём касательную в точке $t_0 = -\frac{1}{n}$ (см. рис.):

$$h(t) = y\Big(-\frac{1}{n}\Big) + y'\Big(-\frac{1}{n}\Big)\Big(t + \frac{1}{n}\Big).$$



Тогда $y(t) < h(t)$ при всех $t \leqslant 1$, $t \neq -\frac{1}{n}$. Как следствие при $k \neq j$ получаем

$$\left\|\zeta_j - \zeta_k\right\| \leqslant \sqrt{2}\, h\big(\langle\zeta_j, \zeta_k\rangle\big),$$

причём хотя бы один раз неравенство выполняется как строгое. Складывая, приходим к строгому неравенству

$$S(\mathrm{Z}) < \sqrt{2}\sum_{k\neq j} h\big(\langle\zeta_j, \zeta_k\rangle\big).$$

Далее

$$h(t) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(t + \frac{1}{n}\right) = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}\, t\,,$$

поэтому

$$S(\mathrm{Z}) < \frac{\sqrt{2}}{2}\Big\{(2n+1)\sqrt{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sum_{k\neq j}\langle\zeta_j, \zeta_k\rangle\Big\}. \tag{10}$$

Остаётся учесть, что

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq j}\langle\zeta_j, \zeta_k\rangle &= \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\langle\zeta_j, \zeta_k\rangle - \sum_{j=1}^{n+1}\langle\zeta_j, \zeta_j\rangle = \\ &= \Big\|\sum_{j=1}^{n+1}\zeta_j\Big\|^2 - (n+1).\end{aligned}$$

Подставив это в (10), окончательно получим

$$\begin{aligned}S(\mathrm{Z}) < \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg\{(2n+2)\sqrt{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\Big\|\sum_{j=1}^{n+1}\zeta_j\Big\|^2\bigg\} \leqslant \\ \leqslant (n+1)\sqrt{2n(n+1)}\,.\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Певный А. Б., Истомина М. Н. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // Вестник СыктГУ. Сер. 1. Вып. 6. 2006. С. 219–222.

2. Истомина М. Н., Певный А. Б. *О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц* // Матем. просвещение. Сер. 3. Вып. 11. 2007. С. 105–112.

3. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

4. Casazza P., Kovačevič J. *Equal-norm tight frames with erasures* // Advances in Comp. Math. (Special issue on frames). 2002. P. 387–430.

5. Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Матем. просвещение. Сер. 3. Вып. 1. 1997. С. 115–121.