О ПОЛНОМ АЛЬТЕРНАНСЕ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

28 марта 2013 г.

1°. Пусть $u_0(t),\ u_1(t), \dots,\ u_n(t)$ — линейно независимая система непрерывных на отрезке $[a,\ b]$ функций. Рассмотрим задачу наилучшего приближения

$$\varphi(x) := \max_{t\in[a,\ b]} \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i(t) - u_0(t) \Big| \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}. \tag{1}$$

Как известно [1, с. 38–42] задача (1) имеет решение. В силу предположения о линейной независимости

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) > 0.$$

Обозначим

$$f(x,\ t) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i(t) - u_0(t),$$
$$R(x) = \Big\{ t \in [a,\ b] \mid \big|f(x,\ t)\big| = \varphi(x) \Big\}.$$

Говорят, что вектор $x_* \in \mathbb{R}^n$ обладает *полным альтернансом*, если существуют точки максимального уклонения $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ из $R(x^*)$, такие, что определители Δ_j подматриц, получающихся из матрицы

$$\begin{bmatrix} u_1(t_0) & u_1(t_1) & \dots & u_1(t_n) \\ u_2(t_0) & u_2(t_1) & \dots & u_2(t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(t_0) & u_n(t_1) & \dots & u_n(t_n) \end{bmatrix} \tag{2}$$

исключением j-го столбца, отличны от нуля, а величины $f(x_*,\ t_j)\Delta_j$ имеют чередующиеся знаки, то есть

$$\operatorname{sign}\big(f(x_*,\ t_j)\Delta_j\big) = -\operatorname{sign}\big(f(x_*,\ t_{j-1})\Delta_{j-1}\big), \quad j \in 1:n, \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

При наличии полного альтернанса выполняется неравенство

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_*) + r\|x - x_*\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где r — некоторая положительная константа. В частности, вектор $x_* \in \mathbb{R}^n$, обладающий полным альтернансом, является единственным решением задачи (1).

Если базисные функции $u_1(t), \ldots,\ u_n(t)$ образуют чебышёвскую на $[a, b]$ систему, то все определители Δ_j отличны от нуля и имеют однаковый знак. В этом случае условие (3) принимает классический вид

$$f(x^*,\ t_j) = -f(x^*,\ t_{j-1}), \quad j \in 1:n. \tag{4}$$

Но в общей ситуации именно условие (3), а не (4), определяет полный альтернанс.

Приводимый ниже пример из работы [2] поясняет этот тезис.

2°. Построим базисные функции $u_1(t), \ldots,\ u_n(t)$ и аппроксимируемую функцию $u_0(t)$ так, что вектор $x_* = \mathbb{O}$ будет обладать полным альтернансом; при этом множество $R(x_*)$ будет состоять ровно из $n+1$ точек $t_j = a + jh$, $j \in 0:n$, где $h = \frac{b-a}{n}$, а уклонения $f(x_*,\ t_j)$ будут иметь наперёд заданные знаки ξ_j.

Рассмотрим матрицу $A = A[1:n,\, 0:n]$ вида

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n+1}\sigma_0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n+2}\sigma_1\sigma_n \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & (-1)^{n+3}\sigma_2\sigma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & (-1)^{2n}\sigma_{n-1}\sigma_n \end{bmatrix},$$

где $\sigma_j = \pm 1$. Обозначим через Δ_j определитель подматрицы, получающейся из матрицы A исключением j-го столбца. Нетрудно проверить, что

$$\Delta_j = \sigma_j, \quad j \in 0:n. \tag{5}$$

При $j = n$ это очевидно. При $j = n-1,\ n-2, \ldots,\ 0$ равенство (5) следует из разложения определителя Δ_j по элементам $(j+1)$-й строки.

Зададим произвольную систему знаков $\xi_0,\ \xi_1, \ldots,\ \xi_n$. В качестве базисных функций $u_1(t), \ldots,\ u_n(t)$ возьмём непрерывные ломаные с узлами $t_j = a + jh$, $j \in 0:n$, разбивающими отрезок $[a, b]$ на n равных частей. Значения $u_i(t)$ в узлах $t = t_j$ определим с помощью элементов $A[i, j]$ матрицы A при $\sigma_j = (-1)^j\xi_j$, а именно положим

$$u_i(t_j) = A[i,\ j], \quad j \in 0:n,\ i \in 1:n.$$

Аппроксимируемая функция $u_0(t)$ также будет непрерывной ломаной с узлами, разбивающими отрезок $[a,\ b]$ на $2n$ равных частей. Значения $u_0(t)$ в узлах $\tau_j = a + j\frac{h}{2}$, $j \in 0 : 2n$, определим явно:

$$u_0(\tau_j) = \begin{cases} -\xi_{j/2} & \text{при чётных } j \in 0 : 2n, \\ \quad 0 & \text{при нечётных } j \in 0 : 2n. \end{cases}$$

Ясно, что $\tau_{2j} = t_j$ и $u_0(t_j) = u_0(\tau_{2j}) = -\xi_j$ при $j \in 0 : n$.

На рис. 1 изображён график функции $u_0(t)$ при $n = 3$ и наборе знаков $\xi = (-1,\ -1,\ 1,\ 1)$.

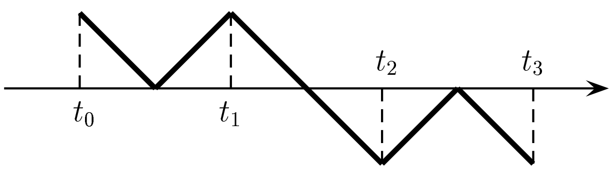

Рис. 1. График функции $u_0(t)$

На рис. 2 представлены графики базисных функций при тех же данных, точнее при $\sigma = (-1,\ 1,\ -1,\ 1)$ и

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

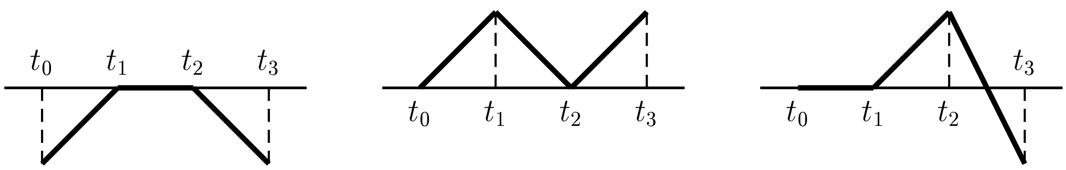

Рис. 2. Графики базисных функций $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$

Теперь обратимся к задаче (1) при выбранных функциях $u_0(t),\ u_1(t), \ldots,$ $u_n(t)$. Покажем, что вектор $x_* = \mathbb{O}$ обладает полным альтернансом.

Имеем

$$f(x_*,\ t) = -u_0(t),$$
$$R(x_*) = \{t_0,\ t_1, \ldots,\ t_n\}.$$

В данном случае матрица (2) совпадает с матрицей A, так что согласно (5)

$$\Delta_j = \sigma_j = (-1)^j \xi_j, \quad j \in 0 : n.$$

Получаем

$$f(x_*,\ t_j)\Delta_j = -u_0(t_j)\Delta_j = \xi_j \Delta_j = (-1)^j, \quad j \in 0 : n.$$

В частности, выполняется условие (3).

Установлено, что вектор $x_* = \mathbb{O}$ обладает полным альтернансом. Вместе с тем, уклонения $f(x_*,\ t_j)$ имеет наперёд заданные знаки ξ_j.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984, 176 с.

2. Малозёмов В. Н., Романов В. С. *Замечание об альтернансе* // Вестник ЛГУ, Сер. 1, 1980, Вып. 4 (№ 19). С. 107–108.