Представление Гаусса для однородных полиномов и критерий сферического дизайна*

Р. Е. Афонин — Snedekorr@gmail.com

А. Б. Певный — pevnyi@syktsu.ru

28 августа 2010 г.

Приводится простое доказательство теоремы о представлении однородного полинома от n переменных через гармонические полиномы. Эта теорема используется для доказательства критерия сферического дизайна в терминах сферических функций.

1°. Через $V_k(x)$ и $W_k(x)$ будем обозначать соответственно произвольный однородный полином степени k от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и произвольный однородный гармонический полином степени k. Гармонический полином удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta W_k = \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 W_k}{\partial x_n^2} = 0.$$

Используем также обозначение $r^2 = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Следующую теорему можно найти в [1] и [2].

ТЕОРЕМА 1 (представление Гаусса)**.** *Однородный полином степени k допускает представление (и притом единственное) следующего вида*

$$V_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} r^{2j}\, W_{k-2j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ПРИМЕР. В случае $n = 2$ найдём представление полинома

$$V_2(u, v) = u^2 + 6uv - 2v^2.$$

Оно имеет вид

$$V_2(u, v) = W_2(u, v) + \left(u^2 + v^2\right) C,$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где C — константа. Полином

$$W_2(u,v) = \big(1 - C\big)\, u^2 + 6uv - \big(2 + C\big)\, v^2$$

будет гармоническим при $C = -\dfrac{1}{2}$. Получаем представление Гаусса:

$$V_2(u,v) = \frac{3}{2}\,\big(u^2 - v^2\big) + 6uv - \frac{1}{2}\,\big(u^2 + v^2\big).$$

Любой однородный гармонический полином второй степени является линейной комбинацией гармонических полиномов $u^2 - v^2$ и uv (см. далее следствие из теоремы 1).

Перед доказательством теоремы установим четыре вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1 (формула Эйлера)**.** *Справедливо тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, \frac{\partial V_k}{\partial x_i}(x) = kV_k(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = V_k(\lambda x)$. Тогда

$$\varphi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \frac{\partial V_k}{\partial x_i}(\lambda x) \;\Rightarrow\; \varphi'(1) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \frac{\partial V_k}{\partial x_i}(x). \tag{2}$$

С другой стороны, в силу однородности $V_k(x)$ выполнено равенство

$$\varphi(\lambda) = \lambda^k\, V_k(x),$$

поэтому

$$\varphi'(\lambda) = k\, \lambda^{k-1}\, V_k(x) \;\Rightarrow\; \varphi'(1) = kV_k(x). \tag{3}$$

Приравнивая правые части (2) и (3), получим требуемое тождество. □

ЛЕММА 2. *Пусть $f(x)$ — однородный полином степени k. Тогда*

$$\Delta(r^2 f) = (2n + 4k) f + r^2 \Delta f. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Delta(r^2 f) = 2nf + 4 \sum_{i=1}^{n} x_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \Delta f.$$

По формуле Эйлера имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf,$$

откуда и вытекает равенство (4). □

СЛЕДСТВИЕ. *Для произвольного натурального числа s справедлива формула*

$$\Delta(r^{2s}f) = s\big[2n + 4k + 4(s-1)\big]\, r^{2s-2}f + r^{2s}\Delta f. \tag{5}$$

Доказательство проведём индукцией по s. При $s = 1$ равенство (5) совпадает с (4). Допустим, что при некотором $s \geqslant 2$

$$\Delta(r^{2s-2}f) = \big(s-1\big)\big[2n + 4k + 4(s-2)\big]\, r^{2s-4}f + r^{2s-2}\Delta f. \tag{6}$$

Применим теперь лемму 2 к однородному полиному $r^{2s-2}f$ степени $k + 2s - 2$. Получим с учётом (6)

$$\begin{aligned}\Delta(r^{2s}f) &= \big(2n + 4k + 8s - 8\big)\, r^{2s-2}f + r^2\Delta(r^{2s-2}f) = \\ &= s\big[2n + 4k + 4s - 4\big]\, r^{2s-2}f + r^{2s}\Delta f,\end{aligned}$$

что совпадает с (5). □

Линейное пространство однородных полиномов степени k от n переменных обозначим $Hom(n,k)$. Вычислим его размерность $d(n,k) = \dim Hom(n,k)$.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$d(n,k) = C^k_{n+k-1}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Произвольный полином $V_k \in Hom(n,k)$ можно представить в виде

$$V_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x_1^i\, q_i(x_2,\dots,x_n),$$

где q_i — однородный полином степени $k - i$ от $n - 1$ переменных $x_2,\dots,x_n$. Отсюда

$$d(n,k) = \sum_{i=0}^{k} d(n-1, k-i). \tag{8}$$

Справедливость формулы (7) доказывается индукцией по n. При $n = 1$ равенство (7) справедливо: $d(1,k) = 1 = C^k_{1+k-1}$.

Допустим, что $d(n-1,k) = C^k_{n+k-2}$ и установим (7). Имеем в силу (8)

$$d(n,k) = \sum_{i=0}^{k} C^{k-i}_{n+k-i-2} = C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-3} + \dots + C^0_{n-2}\,. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}C^k_{n+k-1} &= C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-2} = C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-3} + C^{k-2}_{n+k-3} = \cdots \\ &\cdots = C^k_{n+k-2} + C^{k-1}_{n+k-3} + \dots + C^0_{n-2}\,,\end{aligned}$$

что совпадает с (9). Лемма доказана. □

Будем говорить, что линейное пространство L является прямой суммой подпространств L_1 и L_2 (записывается в виде равенства $L = L_1 \dotplus L_2$), если каждый элемент $v \in L$ представляется в виде $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$, и это представление единственно. Условие единственности равносильно условию $L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{O}\}$.

Через $\mathcal{W}(n,k)$ обозначим линейное пространство однородных гармонических полиномов $W_k(x)$ степени k от n переменных. Следующее утверждение доказано в [1]. Мы приведём упрощённое его доказательство.

ЛЕММА 4. *Пусть $k \geqslant 2$. Справедливо разложение в прямую сумму*

$$Hom(n,k) = \mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2 Hom(n,k-2), \tag{10}$$

где $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ и

$$r^2 Hom(n,k-2) = \big\{P(x) \bigm| P(x) = r^2\, Q(x),\ Q \in Hom(n,k-2)\big\}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\mathcal{W}(n,k) \cap r^2 Hom(n,k-2) = \big\{\mathbb{O}\big\}, \tag{11}$$

где $\mathbb{O}$ — полином, все коэффициенты которого равны нулю. Полином

$$P \in r^2 Hom(n,k-2), \quad P \neq \mathbb{O},$$

можно представить в виде

$$P(x) = r^{2m}\, Q(x),$$

где $Q \in Hom(n,k-2m)$, $m \in 1 : \lfloor k/2 \rfloor$ и $Q(x)$ не делится на r^2. Допустим, что $P \in \mathcal{W}(n,k)$, т. е. $\Delta P = \mathbb{O}$. По формуле (5)

$$\Delta P = m\big[2n + 4(k-2m) + 4(m-1)\big]\, r^{2m-2} Q + r^{2m} \Delta Q = \mathbb{O}.$$

Отсюда $Q = C\, r^2 \Delta Q$, где $C = const \neq 0$, значит Q делится на r^2, что противоречит условию.

Противоречие доказывает равенство (11). Теперь для проверки (10) достаточно установить, что

$$d(n,k) = \dim \mathcal{W}(n,k) + d(n,k-2).$$

Так как $\mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2 Hom(n,k-2) \subset Hom(n,k)$, то

$$\dim \mathcal{W}(n,k) + d(n,k-2) \leqslant d(n,k).$$

Отсюда

$$\dim \mathcal{W}(n,k) \leqslant d(n,k) - d(n,k-2). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь оператор Лапласа Δ как оператор, действующий в пространстве $Hom(n,k)$. Тогда по известной теореме (см. [3], 6.4-6 и 6.4-7) справедливо равенство

$$\dim \mathrm{Ker}\Delta + \dim \mathrm{Im}\,\Delta = \dim Hom(n,k) := d(n,k).$$

У нас $\mathrm{Ker}\Delta = \mathcal{W}(n,k)$, а множество значений $\mathrm{Im}\,\Delta$ оператора Δ содержится в $Hom(n,k-2)$, отсюда

$$\dim \mathrm{Im}\,\Delta \leqslant \dim Hom(n,k-2) := d(n,k-2).$$

Значит

$$\dim \mathcal{W}(n,k) = d(n,k) - \dim \mathrm{Im}\,\Delta \geqslant d(n,k) - d(n,k-2). \tag{13}$$

На основании (12) и (13) получаем равенство

$$\dim \mathcal{W}(n,k) = d(n,k) - d(n,k-2), \tag{14}$$

что равносильно требуемому.

Лемма доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *Для размерности $N(k) = \dim \mathcal{W}(n,k)$ пространства однородных гармонических полиномов степени k справедлива формула*

$$N(k) = C^k_{n+k-1} - C^{k-2}_{n+k-3}\,.$$

Этот результат непосредственно следует из формул (7) и (14).

Доказательство теоремы 1. Лемму 4 применяем $\lfloor k/2 \rfloor$ раз. Если $k \geqslant 4$, то придём к разложению

$$Hom(n,k) = \mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2\,\mathcal{W}(n,k-2) \dotplus r^4 Hom(n,k-4).$$

Если k чётное, $r = 2m$, то на последнем шаге получим подпространство $Hom(n,0) = \mathcal{W}(n,0)$, состоящее из констант. В итоге придём к разложению

$$Hom(h,k) = \mathcal{W}(n,k) \dotplus r^2\,\mathcal{W}(n,k-2) \dotplus \cdots \dotplus r^{2m} Hom(n,0).$$

Если же $k = 2m+1$, то на последнем шаге получим $Hom(n,1) = \mathcal{W}(n,1)$ и разложение закончится слагаемым $r^{2m}\,\mathcal{W}(n,1)$. Теорема 1 доказана. $\square$

2°. На сфере представление Гаусса (1) приобретает ещё более простой вид.

Пусть V_k — однородный полином степени k. Произвольную точку единичной сферы S^{n-1} будем обозначать буквой ξ. Тогда для $V_k(\xi)$ справедливо представление

$$V_k(\xi) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} W_{k-2j}(\xi), \qquad \xi \in S^{n-1}, \tag{15}$$

где W_{k-2j} — гармонический полином степени $k-2j$.

Пусть теперь P — произвольный полином степени не выше t. Он записывается в виде

$$P(x) = V_0(x) + V_1(x) + \cdots + V_t(x),$$

где V_k — однородный полином степени k. В свою очередь V_k на сфере представляется в виде (15). В итоге

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{t} W_j(\xi), \qquad W_j \in Harm(j). \tag{16}$$

Здесь и далее через $Harm(j)$ обозначаем множество сужений на сферу S^{n-1} всех однородных гармонических полиномов степени j.

Значит, при рассмотрении алгебраических полиномов на сфере можно ограничиться гармоническими полиномами.

3°. **Определение и критерий сферического дизайна.** Доказанная теорема 1 имеет важное применение в теории сферических дизайнов.

Будем использовать стандартное скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Тогда $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

В работах [4, 5] дано следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть t — натуральное число.
Множество $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим дизайном порядка t, если выполнено равенство

$$\frac{1}{\sigma_n} \int\limits_{S^{n-1}} P(\xi)\, dS \;=\; \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{17}$$

для любого полинома P степени не выше t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}.

Представление (16) для алгебраических полиномов на сфере позволяет дать критерий сферического дизайна.

Заметим, что сужение однородного гармонического полинома W_k на сферу S^{n-1} называется сферической функцией (или сферической гармоникой) порядка k. Таким образом, $Harm(k)$ — это множество сферических функций порядка k. Для любой сферической функции $W_k(\xi)$ порядка $k \geqslant 1$ интеграл по сфере равен нулю:

$$\int\limits_{S^{n-1}} W_k(\xi)\, dS \;=\; 0. \tag{18}$$

Равенство (18) является частным случаем более общего факта: сферические функции разных порядков ортогональны на сфере (см. [6] — случай $n = 3$ или [2] — общий случай). Равенство (18) означает, что $W_k(\xi)$ при $k \geqslant 1$ ортогональна сферическим функциям нулевого порядка (константам).

Теперь можно установить критерий сферического дизайна (он указан в [5], теорема 5.2).

ТЕОРЕМА 2. *Система* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ *является сферическим дизайном порядка* t *тогда и только тогда, когда для любого* $k = 1, 2, \ldots, t$ *и любой сферической функции* $W_k(\xi)$ *порядка* k *выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{m} W_k(\varphi_i) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ — сферический t-дизайн. Тогда в силу (17) и (18) при $k \in 1 : t$ будет выполняться равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_k(\varphi_i) \;=\; \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} W_k(\xi)\, dS \;=\; 0.$$

Достаточность. Пусть P — произвольный полином степени не выше t. Тогда на сфере справедливо представление (16), причём $W_0(\xi) = const = W_0$. Тогда в силу (18) и (19)

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) = \frac{1}{m}\, m\, W_0 = W_0\,,$$
$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(\xi)\, dS \;=\; \frac{1}{\sigma_n}\,\sigma_n\, W_0 = W_0\,.$$

Значит, Φ — сферический t-дизайн. Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Я. Виленкин. *Специальные функции и теория представлений групп.* М.: Наука, 1965.

2. С. Л. Соболев. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974.

3. В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. *Энциклопедия линейной алгебры.* СПб.: БХВ–Петербург, 2006.

4. Ph. Delsarte. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Repts. Suppl. 1973. N 10.

5. Ph. Delsarte, J. M. Goetals, J. J. Seidel. *Spherical codes and designs* // Geometricae Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

6. В. С. Владимиров. *Уравнения математической физики.* Изд. 4-е. М.: Наука, 1984.