ОБОБЩЁННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ*

Н. А. Соловьёва

vinyo@mail.ru

16 апреля 2008 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из [1].

1°. Напомним [2], что система ненулевых векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ называется жёстким фреймом с константой фрейма $A > 0$, если выполнено одно из трёх эквивалентных условий:

1) $$x = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{m-1} \langle x, \varphi_k \rangle \, \varphi_k \quad \text{для всех } x \in \mathbb{C}^n \, ;$$

2) $$\sum_{k=0}^{m-1} \bigl| \langle x, \varphi_k \rangle \bigr|^2 = A \, \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{C}^n \, ;$$

3) $$\varPhi \varPhi^* = A \, I_n \, ,$$

где $\varPhi$ — матрица со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ и I_n — единичная матрица порядка n.

Если $\|\varphi_k\| = 1$ при всех $k \in 0 : m-1$, то константа фрейма A равна $\frac{m}{n}$.

2°. Пусть $m > n > 1$ и $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ — попарно различные корни m-й степени из единицы. Векторы

$$\varphi_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \, w_j^k, \qquad j \in 0 : n-1, \quad k \in 0 : m-1, \tag{1}$$

образуют *гармонический фрейм*. В частности, $\varphi_0(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при всех $j \in 0 : n-1$. Если ввести диагональную матрицу $W = \operatorname{diag}(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$, то формулу (1) можно переписать в виде

$$\varphi_k = W^k \varphi_0, \quad k \in 0 : m-1 \qquad (W^0 = I_n). \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Теперь возьмём комплексное число c, $|c| = 1$, и обозначим через $c_0, c_1, \ldots,$ c_{n-1} попарно различные корни m-й степени из c. Возьмём также n комплексных чисел $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, по модулю равных единице. Векторы

$$\psi_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j\, c_j^k, \qquad j \in 0 : n-1, \quad k \in 0 : m-1, \tag{3}$$

образуют *обобщённый гармонический фрейм.* В частности, $\psi_0(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, b_j$, $j \in 0 : n-1$. Ясно, что $\|\psi_k\| = 1$ при всех $k \in 0 : m-1$.

Введём диагональные матрицы $B = \operatorname{diag}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$, $V = \operatorname{diag}(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$. Формулу (3) можно переписать двумя способами:

$$\psi_k = V^k \psi_0, \qquad\qquad k \in 0 : m-1; \tag{4}$$

$$\psi_k = B\,(V^k \varphi_0), \qquad k \in 0 : m-1. \tag{5}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Обобщённый гармонический фрейм $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$ является жёстким фреймом с константой $A = \frac{m}{n}$.*

Доказательство. Обозначим через $\varPsi$ матрицу со столбцами $\psi_0, \psi_1, \ldots,$ ψ_{m-1}. При $j, s \in 0 : n-1$ имеем

$$(\varPsi\varPsi^*)[j,s] = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(j)\, \overline{\psi_k(s)} \overset{(3)}{=} \tfrac{1}{n}\, b_j\, \bar{b}_s \sum_{k=0}^{m-1} (c_j\, \bar{c}_s)^k.$$

В частности, $(\varPsi\varPsi^*)[j,j] = \frac{m}{n}$. Если $j \neq s$, то по формуле для суммы членов геометрической прогрессии получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} (c_j\, \bar{c}_s)^k = \frac{1 - c_j^m\, c_s^m}{1 - c_j\, \bar{c}_s} = \frac{1 - c\, c}{1 - c_j\, \bar{c}_s} = 0,$$

так что $(\varPsi\varPsi^*)[j,s] = 0$. Таким образом,

$$\varPsi\varPsi^* = \tfrac{m}{n}\, I_n.$$

Остаётся сослаться на определение 3) жёсткого фрейма. □

3°. В следующем предложении установлена связь между обобщёнными гармоническими фреймами и гармоническими.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система векторов $\{\psi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является обобщённым гармоническим фреймом тогда и только тогда, когда существует гармонический фрейм $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$, комплексное число g, $|g| = 1$, и диагональная матрица B, диагональные элементы которой по модулю равны единице, такие, что*

$$\psi_k = B\,(g^k \varphi_k), \qquad k \in 0 : m-1. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{m-1}$ — обобщённый гармонический фрейм. Обозначим $c = e^{i\theta}$, $g = e^{i\theta/m}$, $w_j = g^{-1}c_j$. Тогда

$$w_j^m = g^{-m}c_j^m = g^{-m}c = 1, \qquad j \in 0 : n-1,$$

то есть $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ — попарно различные корни m-й степени из единицы. Поскольку $c_j = g\, w_j$, то $V = g\, W$. Согласно (5) и (2)

$$\psi_k = B\,(g^k\, W^k \varphi_0) = B\,(g^k \varphi_k), \quad k \in 0 : m-1.$$

Наоборот, пусть векторы ψ_k определяются формулой (6). Положим $c_j = g\, w_j$. Тогда $c_j^m = g^m =: c$, то есть $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — попарно различные корни m-й степени из c, $|c| = 1$. Очевидно, что $V = g\, W$. Учитывая (2), получаем

$$\psi_k = B\,(g^k\, W^k \varphi_0) = B\,(V^k \varphi_0), \qquad k \in 0 : m-1.$$

Эта формула совпадает с (5), так что $\{\psi_k\}_{k=0}^{m-1}$ — обобщённый гармонический фрейм. Предложение доказано. □

4°. Пусть по-прежнему $m > n > 1$. Возьмём унитарную матрицу U порядка n, единичный вектор $\eta_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим последовательность единичных векторов

$$\eta_k = U \eta_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots, m-1. \tag{7}$$

Обозначим $H = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}\}$. Если система H — жёсткий фрейм, то её можно преобразовать в обобщённый гармонический фрейм. Для этого воспользуемся спектральным разложением унитарной матрицы U (см., например, [3, с. 248])

$$U = P \Lambda P^*, \tag{8}$$

где P — матрица, столбцами которой являются ортонормированные собственные векторы $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ матрицы U, и Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, с диагональными элементами, по модулю равными единице. Систему векторов

$$\psi_k = P^* \eta_k, \qquad k \in 0 : m-1, \tag{9}$$

обозначим через $\varPsi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если H — жёсткий фрейм, то $\varPsi$ — обобщённый гармонический фрейм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\psi_0(j) = \langle \eta_0, p_j \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j, \tag{10}$$

где $b_j = \sqrt{n}\, \langle \eta_0, p_j \rangle$. Покажем, что $|b_j| = 1$ при всех $j \in 0 : n-1$.

Разложим вектор η_0 по базису $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$. Получим

$$\eta_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \langle \eta_0, p_j \rangle \, p_j = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j \, p_j \, .$$

Если обозначить через b вектор с компонентами $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\eta_0 = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \, P \, b \, .$$

Согласно (7) и (8)

$$\eta_k = U^k \eta_0 = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \, P \Lambda^k P^* P \, b = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \, P \Lambda^k b = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} b_s \, \lambda_s^k \, p_s \, .$$

Как следствие

$$\big| \langle \eta_k, p_j \rangle \big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \big| b_j \, \lambda_j^k \big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \big| b_j \big| \quad \text{при всех } \ k \in 0 : m-1.$$

По определению 2) жёсткого фрейма (при $x = p_j$)

$$\|p_j\|^2 = \frac{n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \big| \langle p_j, \eta_k \rangle \big|^2 = |b_j|^2,$$

так что $|b_j| = 1$ при всех $j \in 0 : n-1$.

Далее

$$\psi_k = P^* \eta_k = P^* \, U^k \eta_0 = P^* \big(P \Lambda^k P^* \big) \eta_0 = \Lambda^k \big(P^* \eta_0 \big) = \Lambda^k \psi_0. \tag{11}$$

На основании (10) и (11) получаем

$$\psi_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \, b_j \, \lambda_j^k, \qquad j \in 0 : n-1, \quad k \in 0 : m-1. \tag{12}$$

Остаётся показать, что λ_j — попарно различные корни m-й степени из некоторого числа $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$.

Как известно [4], из того, что система H, построенная по формуле (7), является жёстким фреймом, следует равенство

$$U^m = c \, I_n,$$

где $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Согласно (8)

$$P \Lambda^m P^* = c \, I_n,$$

так что $\Lambda^m = c\, I_n$. Это равносильно соотношению

$$\lambda_j^m = c \quad \text{при всех } j \in 0 : n-1.$$

Значит, λ_j — корни m-й степени из c. Покажем, что $\lambda_j \neq \lambda_s$ при $j \neq s$.

Не вызовет недоразумений, если мы будем обозначать через Ψ и H матрицы со столбцами $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ и $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$ соответственно. Согласно (9), $\Psi = P^* H$. Система H является жёстким фреймом. Жёстким фреймом будет и система Ψ, поскольку

$$\Psi\,\Psi^* = P^* H H^* P = \tfrac{m}{n}\, I_n.$$

В частности, $(\Psi\,\Psi^*)[j,s] = 0$ при $j \neq s$. Распишем это равенство подробно:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(j)\, \overline{\psi_k(s)} = 0.$$

В силу (12)

$$\tfrac{1}{n}\, b_j\, \bar{b}_s \sum_{k=0}^{m-1} \big(\lambda_j\, \bar{\lambda}_s\big)^k = 0.$$

Как следствие

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big(\lambda_j\, \bar{\lambda}_s\big)^k = 0 \quad \text{при } j \neq s.$$

Ясно, что $\lambda_j \neq \lambda_s$ при $j \neq s$, ибо иначе мы получили бы противоречие с последним равенством. Предложение доказано. $\square$

З а м е ч а н и е. Предложение 3 позволяет усилить результат из [4]. Справедливо такое утверждение.

Если система H, построенная по формуле (7), является жёстким фреймом, то $U^m = c\, I_n$, где $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. При этом собственные числа унитарной матрицы U суть попарно различные корни m-й степени из c.

5°. Приведём пример к предложению 3.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 2$, $m = 3$. Рассмотрим фрейм Мерседес-Бенц, состоящий из векторов

$$b_0 = \big(0, 1\big)^T, \quad b_1 = \big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\big)^T, \quad b_2 = \big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\big)^T.$$

Как известно [5, с. 100], это жёсткий фрейм. Нетрудно проверить, что $b_k = U\, b_{k-1}$, $k = 1, 2$, где

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица U — унитарная с собственными числами $\lambda_0 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_3$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_3^2$ и собственными векторами

$$p_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad p_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Все условия предложения 3 выполнены. Построим обобщённый гармонический фрейм.

Имеем

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \qquad P^* = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \\ \psi_0 &= P^* b_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}, \\ \psi_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i\,\lambda_0 \\ -i\,\lambda_1 \end{bmatrix}, \\ \psi_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i\,\lambda_0^2 \\ -i\,\lambda_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В данном случае $b_0 = i$, $b_1 = -i$.

6°. Условие жёсткости фрейма H в предложении 3 можно заменить условиями на унитарную матрицу U и начальный вектор η_0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Система векторов Ψ является обобщённым гармоническим фреймом тогда и только тогда, когда*

1) $\bigl|\langle \eta_0, p_j\rangle\bigr| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *при всех* $j \in 0 : n-1$*;*

2) собственные числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ *матрицы* U *суть попарно различные корни* m*-й степени из некоторого числа* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$.

Доказательство. По построению (формулы (7) и (9))

$$\psi_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j\, \lambda_j^k, \qquad j \in 0 : n-1, \quad k \in 0 : m-1, \tag{13}$$

где $b_j = \sqrt{n}\,\langle \eta_0, p_j\rangle$. Если выполнены условия 1) и 2), то по определению Ψ — обобщённый гармонический фрейм.

Наоборот, пусть Ψ — обобщённый гармонический фрейм. Согласно (3), $|\psi_0(j)| \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}$, что в применении к формуле (13) даёт $|b_j| = 1$ при всех $j \in 0 : n-1$. Условие 1) выполнено.

Далее по предложению 1 обобщённый гармонический фрейм Ψ является жёстким фреймом. Учитывая этот факт и представление (13), так же, как в конце доказательства предложения 3, получаем $\lambda_j \neq \lambda_s$ при $j \neq s$.

Вместе с Ψ жёстким фреймом будет и система H. Действительно, как отмечалось, $\Psi = P^* H$, так что $H = P\Psi$ и

$$HH^* = P\Psi\Psi^*P^* = \tfrac{m}{n}\, I_n.$$

В этом случае $U^m = c\, I_n$, где $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Отсюда следует, что $\lambda_j^m = c$ при всех $j \in 0 : n-1$, то есть λ_j — корни m-й степени из c. Условие 2) также выполнено. Предложение доказано. $\square$

7°. Приведём примеры к предложению 4.

ПРИМЕР 2 (условия 1) и 2) выполнены). Пусть $n = 2$, $m = 3$. Рассмотрим унитарную матрицу U с собственными числами $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \omega_3$ и ортонормированными собственными векторами

$$p_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае

$$P = P^* = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$U = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\omega_3 & 1-\omega_3 \\ 1-\omega_3 & 1+\omega_3 \end{bmatrix}.$$

Возьмём начальный вектор $\eta_0 = (1, 0)^T$. Для него

$$\big|\langle \eta_0, p_0 \rangle\big| = \big|\langle \eta_0, p_1 \rangle\big| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Таким образом, условия 1) и 2) выполнены.

Найдём векторы η_1 и η_2:

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\omega_3 \\ 1-\omega_3 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\omega_3^2 \\ 1-\omega_3^2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим векторы ψ_k:

$$\psi_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_3^2 \end{bmatrix}.$$

Получили, что $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ — гармонический фрейм.

ПРИМЕР 3 (нарушено условие 1)). Пусть $n = 2$, $m = 3$. Рассмотрим унитарную матрицу U с собственными числами $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \omega_3$ и ортонормированными собственными векторами

$$p_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае $P = P^* = I_2$ и

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Возьмём начальный вектор $\eta_0 = (1, 0)^T$. Для него

$$\big|\langle \eta_0, p_0 \rangle\big| = 1, \quad \big|\langle \eta_0, p_1 \rangle\big| = 0,$$

то есть условие 1) нарушено.

Найдём векторы η_1 и η_2:

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим векторы ψ_k:

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Система $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ не является жёстким фреймом, так как линейные комбинации её элементов не порождают пространства $\mathbb{C}^2$ (см. определение 1) жёсткого фрейма). Согласно предложению 1 она не может быть и обобщённым гармоническим фреймом.

ПРИМЕР 4 (нарушено условие 2)). Рассмотрим унитарную матрицу U второго порядка с собственными числами $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = i$ и ортонормированными собственными векторами

$$p_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае $P = P^* = I_2$ и

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Условие 2) при $m = 3$ нарушено, поскольку $\lambda_0^3 \neq \lambda_1^3$.

Возьмём начальный вектор $\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Для него

$$\bigl|\langle \eta_0, p_0 \rangle\bigr| = \bigl|\langle \eta_0, p_1 \rangle\bigr| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

то есть условие 1) выполнено.

Найдём векторы η_1 и η_2:

$$\eta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\psi_0 = \eta_0$, $\psi_1 = \eta_1$, $\psi_2 = \eta_2$. У матрицы

$$\boldsymbol{\Psi} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix}$$

строки не ортогональны. Значит, система $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ не является жёстким фреймом (см. определение 3)) и, тем более, не будет обобщённым гармоническим фреймом (см. предложение 1).

Отметим, что $\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. При $m = 4$ система $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ образует гармонический фрейм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Casazza P. G., Kovačevič J. *Uniform Tight Frames with Erasures* // Adv. Comp. Math. 2003. V. 18. No. 2–4. P. 387–430.

2. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Системы Мерседес-Бенц и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`).

3. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 576 с.

4. Соловьёва Н. А. *О жёстких фреймах специального вида* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 12 марта 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0312`).

5. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.