ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ*

М. И. Григорьев

m_grigoriev@list.ru

15 сентября 2007 г.

В данном докладе представлен вариант обобщения понятия классической поверхности вращения. Предложен метод построения обобщённых поверхностей вращения, аналогичный методу из [1].

1°. Напомним, что поверхность вращения в классическом понимании образована вращением некоторой плоской кривой относительно прямолинейной оси, лежащей в плоскости этой кривой. Первое возможное обобщение связано с заменой оси вращения на некоторую пространственную кривую. Кроме того, можно обобщить само понятие вращения так, что сечением такой поверхности становится не окружность, а эллипс с двумя независимыми радиусами.

Итак, пусть $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ задаёт некоторую непрерывно-дифференцируемую кривую. Будем называть её *кривой центров*. Предположим, что $\|C'(t)\| \neq 0$ при любом $t \in [0,1]$. Обозначим

$$T(t) = C'(t)/\|C'(t)\|, \qquad t \in [0,1].$$

Вектор $T(t)$ является единичным вектором касательной к кривой C.

Пусть далее $f_N, f_B\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_t\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывные функции. Вектор-функция

$$F(u) = (f_N(u), f_B(u), f_t(u)), \qquad u \in [0,1],$$

определяет параметрическую кривую в $\mathbb{R}^3$. Назовём её *кривой радиусов*. Функция $f_t(u)$ управляет положением центров вращения на кривой C.

Выберем также некоторую непрерывную вектор-функцию $B : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ такую, чтобы для всех t из отрезка $[0,1]$ вектор $B(t)$ имел единичную длину

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

и был ортогонален вектору $T(t)$. Положим

$$N(t) = B(t) \times T(t), \tag{1}$$

где $\times$ — знак векторного умножения.

Зафиксируем некоторое $u \in [0,1]$. Рассмотрим точку на кривой центров C, соответствующую значению параметра t, равному $t_u = f_t(u)$. Пара $(N(t_u), B(t_u))$ определяет нормальную плоскость к кривой в этой точке (см. рис. 1). Рассмотрим лежащий в этой плоскости эллипс с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$:

$$G(u,v) = C(t_u) + \big(f_N(u)\cos 2\pi v\big)\, N(t_u) + \big(f_B(u)\sin 2\pi v\big)\, B(t_u), \quad v \in [0,1]. \tag{2}$$

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая (2) порождает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая называется *обобщённой поверхностью вращения* кривой радиусов F относительно кривой центров C.

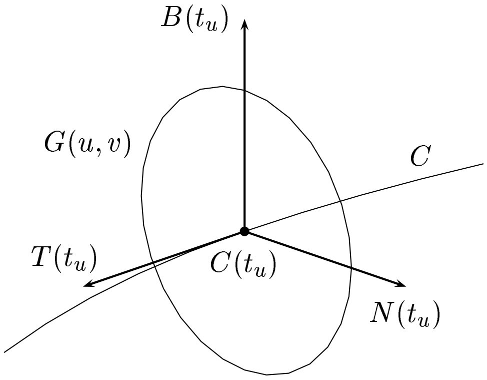

Рис. 1

2°. Пусть на плоскости зафиксированы три полюса P_0, P_1, P_2. По ним можно построить проективную кривую Безье второго порядка [2, с. 212–221]

$$R(v) = (r_x(v), r_y(v)) = \frac{P_0\,(1-v)^2 + 2\,w\,P_1\,v(1-v) + P_2\,v^2}{(1-v)^2 + 2\,w\,v(1-v) + v^2}, \quad v \in [0,1], \tag{3}$$

где w — некоторое положительное число. Известно, что если полюсы P_0, P_1, P_2 расположены в вершинах единичного квадрата так, как показано на рис. 2, и выполнено условие $w = \sqrt{2}/2$, то кривая (3) является четвертью окружности единичного радиуса [3].

Четверть эллипса можно построить таким же образом. Зафиксируем два положительных числа a, b и рассмотрим кривую

$$\widetilde{R}(v) = \big(a\, r_x(v), b\, r_y(v)\big), \qquad v \in [0,1], \tag{4}$$

построенную по полюсам $\widetilde{P}_0(a,0)$, $\widetilde{P}_1(a,b)$, $\widetilde{P}_2(0,b)$. Здесь $r_x(v)$ и $r_y(v)$ те же, что и в (3). Очевидно, что если значение w равно $\sqrt{2}/2$, то кривая (4) представляет собой четверть эллипса с радиусами a, b (рис. 3).

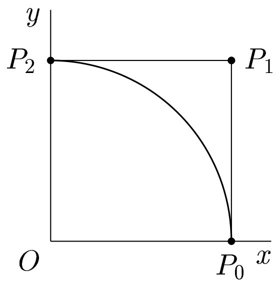

Рис. 2

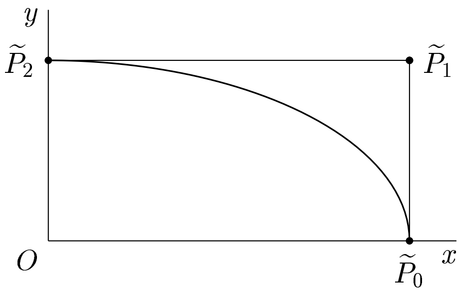

Рис. 3

3°. В [1] было показано, как строить классические поверхности вращения с помощью проективных кривых Безье второго порядка. Подобный подход примени́м и к обобщённым поверхностям вращения.

Рассмотрим три вектор-функции $P_0, P_1, P_2 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$P_0(u) = C(t_u) + f_N(u)N(t_u), \qquad P_2(u) = C(t_u) + f_B(u)B(t_u),$$
$$P_1(u) = C(t_u) + f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u).$$

Зафиксируем $u \in [0,1]$. Уравнение проективной кривой второго порядка, построенной по полюсам $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_2(u)$ с параметром $w = \sqrt{2}/2$ имеет вид

$$\widetilde{G}(u,v) = \frac{P_0(u)\,(1-v)^2 + \sqrt{2}\,P_1(u)\,v\,(1-v) + P_2(u)\,v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}\,v\,(1-v) + v^2}\,, \qquad v \in [0,1].$$

Перепишем эту формулу

$$\widetilde{G}(u,v) = C(t_u) + \frac{\widetilde{P}_0(u)\,(1-v)^2 + \sqrt{2}\,\widetilde{P}_1(u)\,v\,(1-v) + \widetilde{P}_2(u)\,v^2}{(1-v)^2 + \sqrt{2}\,v\,(1-v) + v^2}\,. \tag{5}$$

Здесь

$$\widetilde{P}_0(u) = f_N(u)N(t_u), \qquad \widetilde{P}_2(u) = f_B(u)B(t_u),$$
$$\widetilde{P}_1(u) = f_N(u)N(t_u) + f_B(u)B(t_u).$$

На основании пункта 2° заключаем, что кривая (5) является четвертью эллипса с центром в точке $C(t_u)$ и радиусами $f_N(u)$, $f_B(u)$, лежащего в нормальной плоскости.

Когда параметр u пробегает все значения от 0 до 1, кривая $\widetilde{G}(u,v)$ порождает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая по построению совпадает с четвертью обобщённой поверхности вращения $G(u,v)$ (рис. 4).

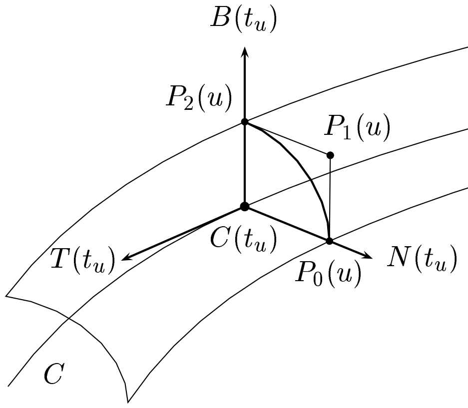

Рис. 4

4°. Укажем некоторые возможные способы выбора вектор-функции B и приведём примеры обобщённых поверхностей вращения.

Рассмотрим сначала простой случай, когда кривая центров C является плоской. Не ограничивая общности можно считать, что кривая C лежит в плоскости Oxz. Положим

$$B(t) \equiv (0,1,0). \tag{6}$$

С учётом (1) и (6) имеем

$$N(t) = (T_z(t), 0, -T_x(t)), \qquad t \in [0,1], \tag{7}$$

где $T_x(t)$, $T_z(t)$ — первая и третья компоненты вектор-функции $T(t)$.

На рис. 5 представлены кривая радиусов F (в данном примере f_N совпадает с f_B и $f_t(u) \equiv u$) и кривая центров C. Соответствующая им поверхность вращения изображена на рис. 6.

Когда в качестве кривой центров выбран отрезок оси Oz, и радиусы f_N, f_B тождественно равны, обобщённая поверхность вращения представляет собой обычную поверхность вращения. Пример такой поверхности дан на рис. 7. Порождающие кривая радиусов и кривая центров приведены на рис. 8.

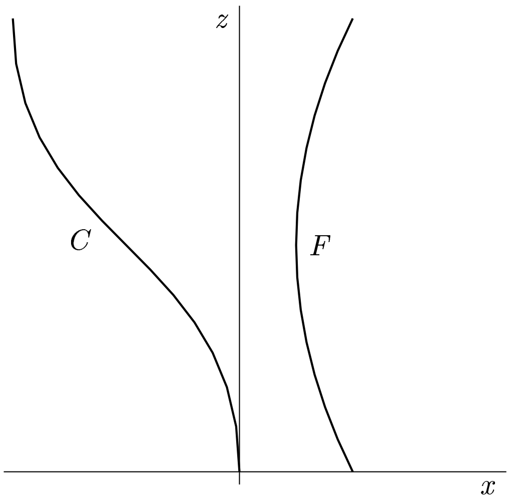

Рис. 5

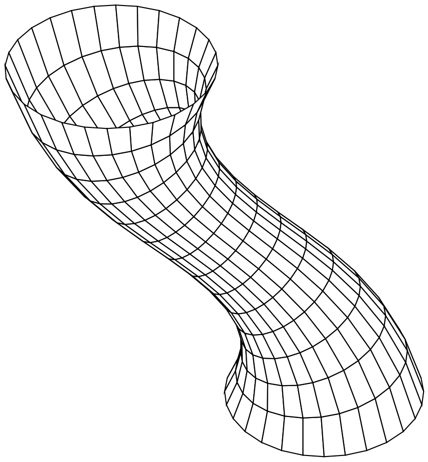

Рис. 6

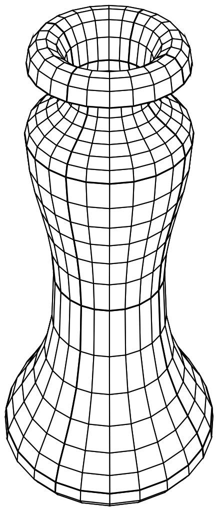

Рис. 7

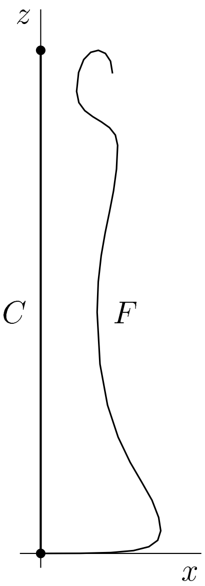

Рис. 8

Вернёмся к общему случаю пространственной кривой центров C. Укажем наиболее простой способ выбора B. Введём дополнительное предположение, что кривая центров обладает гладкостью второго порядка и что

$$\|C''(t)\| > 0, \quad t \in [0,1]. \tag{8}$$

Положим

$$B(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{\|C'(t) \times C''(t)\|}, \qquad t \in [0,1]. \tag{9}$$

Выражение (9) определяет бинормальный вектор к кривой центров в точке $C(t)$. Значит, вектор $N(t) = B(t) \times T(t)$ равен вектору главной нормали к кривой C в этой точке, а правая тройка векторов $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ образует базис Френе [4].

На рис. 9 приведён пример обобщённой поверхности вращения, построенной с учётом выбранной в данном пункте вектор-функции $B(t)$. Порождающая кривая радиусов F представлена на рис. 10 (для наглядности приведены также её проекции на координатные плоскости Oxz и Oyz). В качестве кривой центров использована дуга винтовой кривой.

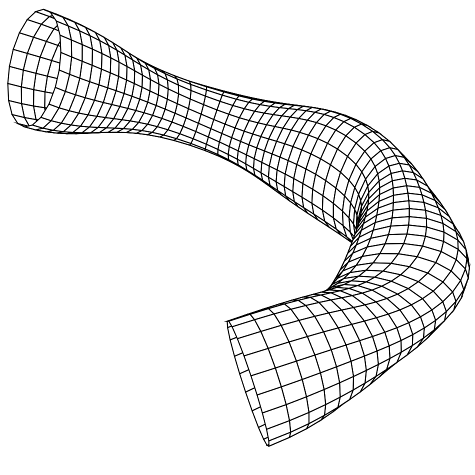

Рис. 9

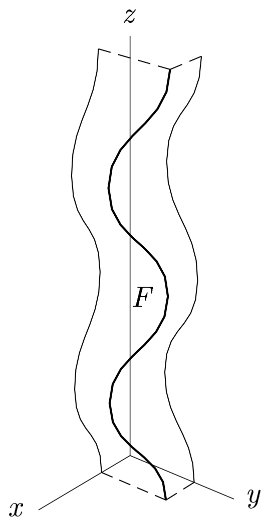

Рис. 10

5°. Условие (8) сильно ограничивает поведение кривой центров. Укажем ещё один способ выбора вектор-функции $B(t)$, не требующий гладкости второго порядка, но предполагающий существование ненулевого вектора N_0 такого, что

$$\|T(t) \times N_0\| \neq 0, \qquad t \in [0,1]. \tag{10}$$

Положим
$$B(t) = \frac{T(t) \times N_0}{\|T(t) \times N_0\|}, \qquad t \in [0,1].$$
Вектор $B(t)$ и в этом случае ортогонален касательному вектору $T(t)$ при каждом $t \in [0,1]$ и имеет единичную длину.

Поясним геометрический смысл такого выбора. Зафиксируем $t \in [0,1]$ и рассмотрим две плоскости, проходящие через точку $C(t)$ и имеющие нормальные векторы $T(t)$ и N_0. Из (10) следует, что эти плоскости не совпадают. Прямая, по которой они пересекаются проходит через точку $C(t)$ и имеет направление $B(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И. *Построение поверхностей вращения* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 27 июня 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0627`)

2. Голованов Н. Н., Ильютко Д. П., Носовский Г. В., Фоменко А. Т. *Компьютерная геометрия.* М.: Академия, 2006. 512 с.

3. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Можно ли построить окружность с помощью кривых Безье?* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 декабря 2006 г. (`http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1216`)

4. Погорелов А. И. *Дифференциальная геометрия.* 6-е изд. М.: Наука, 1974. 176 с.