НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ*

А. В. Лазарев

lazarev_av@sampo.ru

9 сентября 2008 г.

Данный доклад примыкает к докладу [1].

1°. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ задачу математического программирования

$$\begin{gathered} f(x) \to \inf\,, \\ g_i(x) \leqslant 0\,, \quad i \in 1:s\,; \\ x \in P\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Предполагается, что $P \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, и что функции f, $g_1, \ldots, g_s$ дифференцируемы на P (если P не открытое множество, то дифференцируемы на некотором открытом множестве, содержащем P). Кроме того, считаем, что множество планов X задачи (1) непусто и величина $f^* = \inf\big\{ f(x) \mid x \in X \big\}$ конечна.

Введём функцию Лагранжа

$$L(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} y_i\, g_i(x)$$

и наряду с (1) рассмотрим двойственную задачу

$$\varphi(y) := \inf\big\{ L(x,y) \mid x \in P \big\} \to \sup_{y \in \mathbb{R}^s_+}, \tag{2}$$

где $\mathbb{R}^s_+ = \big\{ y = (y_1, \ldots, y_s) \mid y_i \geqslant 0 \text{ при всех } i \in 1:s \big\}$. Обозначим $\varphi^* = \sup\big\{ \varphi(y) \mid y \in \mathbb{R}^s_+ \big\}$ и в дальнейшем будем предполагать, что выполнено соотношение двойственности

$$f^* = \varphi^*. \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Зафиксируем $v = (v_1, \ldots, v_s)$. Множество векторов x, удовлетворяющих возмущённым ограничениям

$$g_i(x) \leqslant v_i\,,\ i \in 1:s\,; \quad x \in P\,,$$

обозначим $X(v)$. Функция $F(v) = \inf\big\{f(x) \mid x \in X(v)\big\}$ называется функцией чувствительности задачи (1). Будем говорить, что выполнено условие *глобальной регулярности* задачи (1), если субдифференциал функции чувствительности в нуле непуст, то есть $\partial F(\mathbb{O}) \neq \varnothing$.

ТЕОРЕМА 1. *Допустим, что выполнены соотношения двойственности* (3) *и условие глобальной регулярности. Тогда если x^* — глобальное решение задачи* (1), *то при любом $y^* \in -\partial F(\mathbb{O})$ точка x^* является решением задачи*

$$L(x, y^*) \to \inf_{x \in P}\,. \tag{4}$$

При этом

$$\big\langle L'_x(x^*, y^*),\, x - x^*\big\rangle \geqslant 0\,, \quad x \in P\,; \tag{5}$$

$$y_i^*\, g_i(x^*) = 0\,, \quad i \in 1:s\,. \tag{6}$$

Доказательство. Напомним [1, теорема 2], что в случае $f^* = \varphi^*$ множество $-\partial F(\mathbb{O})$ совпадает с множеством решений двойственной задачи (2). То, что x^* является решением задачи (4) и выполнены условия дополнительности (6), установлено в [1, теорема 3].

Осталось проверить справедливость неравенства (5). Оно становится очевидным, если учесть, что x^* — оптимальный план задачи (4), функция Лагранжа $L(x, y^*)$ дифференцируема на P и P — выпуклое множество (см., например, [2, с. 87]). Теорема доказана. $\square$

Замечание. Если x^* — внутренняя точка множества P, то условие (5) эквивалентно условию Лагранжа

$$f'(x^*) + \sum_{i=1}^{s} y_i^*\, g_i'(x^*) \;=\; \mathbb{O}\,.$$

2°. Приведём простое достаточное условие глобальной регулярности.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для задачи* (1) *выполнено соотношение двойственности* (3) *и существует точка $z \in P$, такая, что $g_i(z) < 0$ при всех $i \in 1:s$. Тогда $\partial F(\mathbb{O}) \neq \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\partial F(\mathbb{O}) = \varnothing$. Это значит, что двойственная задача (2) не имеет решения [1, теорема 2]. Возьмём максимизирующую последовательность планов $\{y^k\}$ задачи (2). Имеем $y^k \in \mathbb{R}^s_+$ при всех k и $\varphi(y^k) \to \varphi^*$. Как установлено в [1, теорема 4], последовательность $\{y^k\}$ неограниченна. Можно считать, что $\|y^k\| \to \infty$.

Обозначим $\varepsilon_k = \varphi^* - \varphi(y^k)$. Ясно, что $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. В силу равенств $\varphi^* = f^*$ и $f^* = F(\mathbb{O})$ получаем

$$\varphi(y^k) = F(\mathbb{O}) - \varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Напомним, что

$$\varphi(y) = \inf\big\{F(v) + \langle y, v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^s\big\}$$

[1, лемма 2]. Отсюда и из (7) следует, что

$$F(v) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle y^k, -v\rangle - \varepsilon_k \quad \text{при всех } \ v \in \mathbb{R}^s. \tag{8}$$

Введём вектор $v^* = (v^*_1, \ldots, v^*_s)$ с компонентами $v^*_i = g_i(z) < 0$. Подставив в (8) $v = v^*$, придём к неравенству

$$F(v^*) - F(\mathbb{O}) \geqslant \langle y^k, -v^*\rangle - \varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Положим $c = \min\big\{ -v^*_i \mid i \in 1 : s\big\} > 0$. Поскольку $y^k \in \mathbb{R}^s_+$, то

$$\langle y^k, -v^*\rangle \geqslant c \sum_{i=1}^{s} |y^k| \geqslant c\,\|y^k\|\,,$$

так что

$$F(v^*) - F(\mathbb{O}) \geqslant c\,\|y^k\| - \varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Величина $F(v^*)$ конечна, так как $X(v^*) \neq \varnothing$ и $X(v^*) \subset X$. В то же время правая часть неравенства (9) стремится к $+\infty$ при $k \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

3°. Исследуем случай $\partial F(\mathbb{O}) = \varnothing$ при сохранении соотношения двойственности.

ТЕОРЕМА 3. *Существует вектор $u^* \in \mathbb{R}^s_+$, $u^* \neq \mathbb{O}$, такой, что оптимальный план x^* задачи* (1) *является решением следующей задачи*

$$\sum_{i=1}^{s} u^*_i\, g_i(x) \to \inf_{x \in P}. \tag{10}$$

При этом выполняются соотношения

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{s} u^*_i\, g'_i(x),\, x - x^* \Big\rangle \geqslant 0\,, \quad x \in P\,; \tag{11}$$

$$u^*_i\, g_i(x^*) = 0\,, \quad i \in 1 : s\,. \tag{12}$$

Доказательство. По условию

$$f(x^*) = f^* = \varphi^* = \sup_{y\in\mathbb{R}^s_+} \varphi(y)\,.$$

Возьмём последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, стремящуюся к нулю. Согласно определению супремума найдётся последовательность векторов $\{y^k\}$, такая, что $y^k \in \mathbb{R}^s_+$ и

$$f(x^*) - \varepsilon_k \leqslant \varphi(y^k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

В частности, $\varphi(y^k) \to \varphi^*$. Отсюда, как отмечалось, следует, что последовательность $\{y^k\}$ неограниченна. Можно считать, что $\|y^k\| \to \infty$.

Положим $u^k = y^k/\|y^k\|$. Из последовательности единичных векторов $\{u^k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что $u^k \to u^*$, при этом $u^* \in \mathbb{R}^s_+$, $\|u^*\| = 1$. Покажем, что u^* — требуемый вектор.

Согласно (13)

$$f(x^*) - \varepsilon_k \leqslant \inf\big\{L(x, y^k) \mid x \in P\big\} \leqslant f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} y_i^k\, g_i(x^*) \leqslant f(x^*)\,.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{s} y_i^k\, g_i(x^*) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

и тем более

$$\sum_{i=1}^{s} u_i^k\, g_i(x^*) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В пределе получаем

$$\sum_{i=1}^{s} u_i^*\, g_i(x^*) = 0\,. \tag{14}$$

Отсюда следуют условия дополнительности (12).

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{s} u_i^*\, g_i(x) \geqslant 0 \quad \text{при всех} \;\; x \in P.$$

Вместе с (14) это будет гарантировать оптимальность x^* применительно к задаче (10). Допустим вопреки утверждению, что существует вектор $z \in P$, такой, что $\sum\limits_{i=1}^{s} u_i^*\, g_i(z) < 0$. Имеем

$$f(x^*) - \varepsilon_k \leqslant f(z) + \sum_{i=1}^{s} y_i^k\, g_i(z) = \big\|y^k\big\| \Big[f(z)/\|y^k\| + \sum_{i=1}^{s} u_i^k\, g_i(z)\Big]\,.$$

Выражение в квадратных скобках обозначим β_k. Ясно, что

$$\beta_k \to \beta^* = \sum_{i=1}^{s} u_i^*\, g_i(z) < 0\,.$$

При больших k будет $\beta_k \leqslant \frac{1}{2}\,\beta^*$. Следовательно,

$$f(x^*) \leqslant \varepsilon_k + \left\|y^k\right\| \beta_k \leqslant \varepsilon_k + \tfrac{1}{2}\,\beta^* \left\|y^k\right\|. \tag{15}$$

По условию величина $f(x^*)$ конечна. В то же время правая часть неравенства (15) стремится к $-\infty$ при $k \to \infty$. Получили противоречие.

Установлено, что x^* — решение задачи (10). Неравенство (11) является простым следствием этого факта, выпуклости множества P и дифференцируемости целевой функции на P.

Теорема доказана. □

Отметим, что условия (11) и (12) не зависят от функции f.

4°. Приведём два характерных примера.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} f(x) &:= x_1^3 \to \min\,,\\ g_1(x) &:= -x_1^3 + x_2 \leqslant 0\,,\\ g_2(x) &:= -x_1^3 - x_2 \leqslant 0\,,\\ &x \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned} \tag{16}$$

В данном случае $P = \mathbb{R}^2$. Множество планов X этой задачи представлено на рисунке.

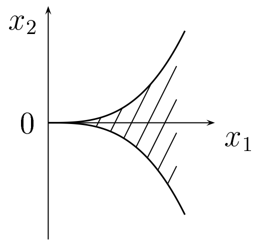

Рис.

Очевидно, что задача имеет единственное решение $x^* = \mathbb{O}$, и $f^* = 0$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y) = x_1^3 + y_1\,(-x_1^3 + x_2) + y_2\,(-x_1^3 - x_2)$$

и целевую функцию двойственной задачи

$$\varphi(y) = \max\left\{L(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

При $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ имеем $L(x, y^*) \equiv 0$, так что $\varphi(y^*) = 0$. Получаем

$$f^* = \varphi(y^*) \leqslant \varphi^* \leqslant f^*\,.$$

Отсюда следует, что y^* — решение двойственной задачи, и $\varphi^* = 0$. В частности, выполняется соотношение двойственности $f^* = \varphi^*$. Поскольку двойственная задача имеет решение, то выполняется также условие глобальной регулярности.

Решение $x^* = \mathbb{O}$ задачи (16) является внутренней точкой множества P. Теорема гарантирует справедливость равенств

$$f'(x^*) + y_1^*\, g_1'(x^*) + y_2^*\, g_2'(x^*) = \mathbb{O}\,,$$
$$y_1^*\, g_1(x^*) = 0\,, \quad y_2^*\, g_2(x^*) = 0\,.$$

Это можно проверить и непосредственно, если учесть, что $f'(x^*) = (0,0)$, $g_1'(x^*) = (0,1)$, $g_2'(x^*) = (0,-1)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Отметим, что градиенты $g_1'(x^*)$ и $g_2'(x^*)$ линейно зависимы. Значит, условие локальной регулярности ограничений в точке x^* не выполняется. В таком случае классическая теорема Куна-Таккера не работает.

Соотношения (5), (6) и (11), (12) могут выполняться и тогда, когда $f^* > \varphi^*$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} f(x) &:= x - 1 \to \min\,, \\ g(x) &:= x^2 - 1 = 0\,, \\ x &\in P = R_+\,. \end{aligned}$$

Ограничения можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} g_1(x) &:= x^2 - 1 \leqslant 0\,, \\ g_2(x) &:= -x^2 + 1 \leqslant 0\,, \\ x &\in P = R_+\,. \end{aligned}$$

Задача имеет единственное решение $x^* = 1$, и $f^* = 0$.

Обратимся к функции Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x,y) &= x - 1 + y_1\,(x^2 - 1) + y_2\,(-x^2 + 1) = \\ &= x^2\,(y_1 - y_2) + x + (y_2 - y_1 - 1). \end{aligned}$$

Для целевой функции двойственной задачи получаем формулу

$$\varphi(y) = \min\big\{L(x,y) \mid x \geqslant 0\big\} = \begin{cases} -1 & \text{при} \;\; y_1 - y_2 = 0, \\ -\infty & \text{при} \;\; y_1 - y_2 < 0, \\ y_2 - y_1 - 1 & \text{при} \;\; y_1 - y_2 > 0. \end{cases}$$

Здесь $y \in \mathbb{R}^2_+$. Очевидно, что $\varphi^* = -1$. Значит, $f^* > \varphi^*$. Вместе с тем,

$$f'(x^*) = 1\,, \quad g_1'(x^*) = 2\,, \quad g_2'(x^*) = -2$$

и

$$f'(x^*) + \tfrac{1}{2}\, g_2'(x^*) = 0\,, \quad g_1'(x^*) + g_2'(x^*) = 0\,.$$

Приходим к следующим выводам: при $y^* = \big(0, \frac{1}{2}\big)$ выполняются соотношения (5), (6), а при $u^* = (1, 1)$ — соотношения (11), (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев А. В. *О соотношении двойственности в математическом программировании* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 17 мая 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0517`).

2. Гаврурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.