ФРЕЙМЫ ГРАССМАНА*

А. М. Дурягин
aleks_maks@rambler.ru

А. Б. Певный
pevnyi@syktsu.ru

27 ноября 2007 г.

1°. Пусть $m \geqslant n$. Через $\varPhi$ будем обозначать систему из m единичных векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\varPhi = \bigl\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\bigr\}.$$

Следуя [1], величину

$$M(\varPhi) = \max_{k \neq s} \bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr|$$

назовём *максимальной корреляцией.* Система единичных векторов $\varPhi^*$, для которой

$$M(\varPhi^*) = \min_{\varPhi} M(\varPhi),$$

называется *системой Грассмана*, а если $\varPhi^*$ — фрейм, то можно говорить о *фрейме Грассмана.*

В задаче минимизации $M(\varPhi)$ важную роль играет оценка $M(\varPhi)$ снизу, установленная Уэлчем [2].

ТЕОРЕМА 1 (Уэлч, 1974). *Справедливо неравенство*

$$M(\varPhi) \geqslant \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}}\,. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим фреймовый потенциал системы $\varPhi$:

$$P(\varPhi) = \sum_{k,s=1}^{m} \bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr|^2.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В [3, 4] установлено, что
$$P(\varPhi) \geqslant \frac{m^2}{n}\,, \tag{2}$$
причём равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда $\varPhi$ — жёсткий фрейм.

Введём величину
$$V(\varPhi) = \sum_{k \neq s} \bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr|^2.$$

Величина $V(\varPhi)$ отличается от $P(\varPhi)$ отсутствием слагаемых $\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle\bigr|^2$, $k \in 1:m$, равных единице. Поэтому $V(\varPhi) = P(\varPhi) - m$. В силу (2)
$$V(\varPhi) \geqslant \frac{m^2}{n} - m = \frac{m\,(m-n)}{n}\,.$$

Оценим $V(\varPhi)$ сверху, заменив каждое слагаемое на $\bigl[M(\varPhi)\bigr]^2$. Учитывая, что всего слагаемых $m^2 - m = m\,(m-1)$, получаем
$$V(\varPhi) \leqslant m\,(m-1)\bigl[M(\varPhi)\bigr]^2.$$

Значит,
$$\bigl[M(\varPhi)\bigr]^2 \geqslant \frac{1}{m\,(m-1)}\,V(\varPhi) \geqslant \frac{m-n}{n\,(m-1)}\,,$$
что равносильно (1). □

2°. Величину, стоящую в правой части неравенства (1), называют *границей Уэлча* и обозначают $W(n,m)$:
$$W(n,m) = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}}\,.$$

Если для некоторой системы $\varPhi^*$ выполняется равенство $M(\varPhi^*) = W(n,m)$, то $\varPhi^*$ доставляет минимум функционалу M. Такая система $\varPhi^*$ называется *системой Грассмана-Уэлча*. В [1] получена характеризация систем Грассмана-Уэлча в терминах равноугольности.

Напомним, что система $\varPhi$ называется *равноугольной*, если
$$\bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr| = c \quad \text{при всех } k \neq s,$$
где c — фиксированное число.

ТЕОРЕМА 2. *Равенство $M(\varPhi) = W(n,m)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varPhi$ — равноугольный жёсткий фрейм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что для некоторой системы Φ выполняется равенство $M(\Phi) = W(n,m)$. Согласно (2) имеем

$$\frac{m^2}{n} \leqslant P(\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \bigl|\langle\varphi_k,\varphi_k\rangle\bigr|^2 + \sum_{k\neq s} \bigl|\langle\varphi_k,\varphi_s\rangle\bigr|^2 \leqslant m + m\,(m-1)\bigl[M(\Phi)\bigr]^2 =$$

$$= m + m\,(m-1)\,\frac{m-n}{n\,(m-1)} = \frac{m^2}{n}\,.$$

Отсюда следуют два равенства

$$P(\Phi) = \frac{m^2}{n}\,, \tag{3}$$

$$\sum_{k\neq s} \bigl|\langle\varphi_k,\varphi_s\rangle\bigr|^2 = m\,(m-1)\bigl[M(\Phi)\bigr]^2. \tag{4}$$

Как отмечалось при доказательстве теоремы 1, равенство (3) гарантирует, что Φ — жёсткий фрейм. Если учесть, что (4) эквивалентно соотношению $\bigl|\langle\varphi_k,\varphi_s\rangle\bigr| = M(\Phi)$ при $k \neq s$, то получаем, что жёсткий фрейм Φ является равноугольным.

Наоборот, пусть Φ — равноугольный жёсткий фрейм. Тогда $P(\Phi) = \frac{m^2}{n}$ и $\bigl|\langle\varphi_k,\varphi_s\rangle\bigr| = c$ при $k \neq s$. Отсюда следует, что

$$\frac{m^2}{n} = P(\Phi) = m + m\,(m-1)\,c^2.$$

Получаем

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}} = W(n,m).$$

Значит,

$$M(\Phi) := \max_{k\neq s} \bigl|\langle\varphi_k,\varphi_s\rangle\bigr| = c = W(n,m).$$

Теорема доказана. □

3°. По теореме 2 фреймы Грассмана-Уэлча — это то же самое, что равноугольные жёсткие фреймы. К сожалению, равноугольные системы векторов существуют не для всех пар (n,m) [5]. Поэтому представляет интерес нахождение фреймов Грассмана (минимизирующих функционал $M(\Phi)$) из разных дополнительных соображений. Например, при $n = 2$ фреймы Грассмана можно построить для всех $m \geqslant 2$. Это сделано в работе [6]. К изложению соответствующего результата мы и переходим.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой системы $\mathit{\Phi} = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$, состоящей из m единичных двумерных векторов, справедливо неравенство*

$$M(\mathit{\Phi}) \geqslant \cos\frac{\pi}{m}\,. \tag{5}$$

Равенство достигается, например, на вещественном гармоническом фрейме $\mathit{\Phi}^*$, у которого

$$\varphi_k^* = \Big(\cos\frac{\pi k}{m}, \sin\frac{\pi k}{m}\Big), \quad k \in 0 : m-1. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмём произвольную систему $\mathit{\Phi} = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ единичных векторов вида $\varphi_k = (x_k, y_k)$. Не умаляя общности, можно считать, что векторы φ_k лежат в верхней полуплоскости.

Обозначим через θ_k угол между положительным направлением оси x и вектором φ_k. Можно считать, что

$$0 = \theta_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \dots \leqslant \theta_{m-1} \leqslant \pi$$

(если $\theta_0 > 0$, то повернём все векторы φ_k на угол $-\theta_0$). Ясно, что $\varphi_0 = (1, 0)$.

Обозначим через α_k угол между φ_k и φ_{k+1}, $k \in 0 : m-2$, а через α_{m-1} — угол между φ_{m-1} и отрицательным направлением оси x. Тогда

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k = \pi,$$

причём все α_k неотрицательны. Отметим, что минимальный из углов α_k не превосходит $\frac{\pi}{m}$:

$$\alpha_s := \min_{k \in 0:m-1} \alpha_k \leqslant \frac{\pi}{m}\,.$$

Оценим $M(\mathit{\Phi})$ снизу. Имеем

$$\big|\langle \varphi_k, \varphi_{k+1}\rangle\big| \geqslant \langle \varphi_k, \varphi_{k+1}\rangle = \cos\alpha_k\,, \quad k \in 0 : m-2;$$

$$\big|\langle \varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle\big| \geqslant \langle \varphi_{m-1}, -\varphi_0\rangle = \cos\alpha_{m-1}\,.$$

Значит,

$$M(\mathit{\Phi}) \geqslant \max\{\cos\alpha_0, \cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_{m-1}\} = \cos\alpha_s \geqslant \cos\frac{\pi}{m}\,,$$

что соответствует (5).

Для системы $\mathit{\Phi}^*$, состоящей из векторов (6), выполняется равенство $M(\mathit{\Phi}^*) = \cos\frac{\pi}{m}$. Это следует из формулы

$$\langle \varphi_k^*, \varphi_j^*\rangle = \cos\frac{\pi(k-j)}{m}\,.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. То, что система $\varPhi^*$ при $m \geqslant 2$ образует жёсткий фрейм, хорошо известно [7]. Учитывая, что

$$W(2,2) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}\,, \qquad W(2,3) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\,,$$

заключаем, что фрейм $\varPhi^*$ при $m = 2$ и $m = 3$ является фреймом Грассмана-Уэлча.

Покажем, что

$$W(2,m) < \cos\frac{\pi}{m} \quad \text{при} \quad m \geqslant 4.$$

Перепишем данное неравенство в эквивалентном виде

$$\frac{m-2}{m-1} < 2\cos^2\frac{\pi}{m} = 1 + \cos\frac{2\pi}{m}\,.$$

Справедливость последнего неравенства очевидна, поскольку $\cos\frac{2\pi}{m} \geqslant 0$ при $m \geqslant 4$.

Таким образом, при $m \geqslant 4$ система $\varPhi^*$ является фреймом Грассмана, но не фреймом Грассмана-Уэлча.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strohmer T., Heath R. W. *Grassmannian frames with applications to coding and communication* // Appl. Comput. Harmonic Anal. 2003. V. 14. No. 3. P. 257–275.

2. Welch L. R. *Lower bounds on the maximum cross-correlation of signals* // IEEE Trans. Info. Theory. 1974. V. 20. P. 397–399.

3. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.

4. Певный А. Б. *Фреймы в конечномерных пространствах и задача минимизации фреймового потенциала* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 марта 2006 г. `http://dha.spb.ru/reps06.shtml#0328`

5. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Равноугольные системы векторов и жёсткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 сентября 2007 г. `http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0918`

6. Benedetto J. J., Kolesar J. D. *Geometric properties of Grassmannian frames for* $\mathbb{R}^2$ *and* $\mathbb{R}^3$ // EURASIP J. Applied Signal Proc. 2006. Article ID 49850. P. 1–17.

7. Дурягин А. М., Соловьёва Н. А. *Вещественные гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. `http://dha.spb.ru/reps07.shtml#1009`