ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

5 сентября 2009 г.

Цель данного доклада — показать, следуя [1], как на основе гармонического анализа проверяется иррациональность числа π.

1°. Напомним, что положительное число a называется *рациональным*, если оно допускает представление $a = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. В противном случае число a называется *иррациональным.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Число π является иррациональным.*

Этот факт был установлен Ламбертом в 1761 г. Идея приводимого ниже доказательства принадлежит Нивену (1947 г.)

2°. Начнём издалека.

ЛЕММА. *Пусть $P(x)$ — алгебраический полином степени $2k$. Тогда*

$$\int\limits_0^1 P(x)\,\sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\big[Q(0)+Q(1)\big],$$

где

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}}\,P^{(2i)}(x).$$

Доказательство. Приняв во внимание, что $P^{(2k+2)}(x) \equiv 0$, запишем

$$Q''(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}}\,P^{(2i+2)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{\pi^{2i-2}}\,P^{(2i)}(x).$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Далее

$$\pi^2\, Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i-2}}\, P^{(2i)}(x).$$

Значит,

$$Q''(x) + \pi^2\, Q(x) = \pi^2\, P(x).$$

Имеем

$$\frac{d}{dx}\left[Q'(x)\, \sin\pi x - \pi\, Q(x)\, \cos\pi x\right] = \big(Q''(x) + \pi^2\, Q(x)\big)\, \sin\pi x =$$

$$= \pi^2\, P(x)\, \sin\pi x.$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_0^1 P(x)\, \sin\pi x\, dx = \tfrac{1}{\pi^2}\, \Big(Q'(x)\, \sin\pi x - \pi\, Q(x)\, \cos\pi x\Big)\Big|_0^1 =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\, \big[Q(0) + Q(1)\big].$$

Лемма доказана. □

3°. Переходим к доказательству предложения. Допустим, что π — рациональное число. В этом случае $\pi^2 = \frac{m}{n}$. Последовательность $\left\{\frac{\pi\, m^k}{k!}\right\}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Выберем k столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\pi\, m^k}{k!} < 1. \tag{1}$$

Введём полином $P(x)$ степени $2k$:

$$P(x) = \frac{x^k\, (1-x)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\, \sum_{s=0}^{k} C_k^s\, (-1)^s\, x^{k+s}.$$

Ясно, что $P^{(i)}(0) = 0$ при $i \in 0 : k-1$ и

$$P^{(k+i)}(0) = C_k^i\, (-1)^i\, \frac{(k+i)!}{k!} \quad \text{при} \quad i \in 0 : k.$$

Учитывая, что $P(1-x) \equiv P(x)$, имеем также

$$P^{(i)}(1) = (-1)^i\, P^{(i)}(0), \qquad i \in 0 : 2k.$$

Полином

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\pi^{2i}}\, P^{(2i)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i\, n^i}{m^i}\, P^{(2i)}(x)$$

обладает тем свойством, что $m^k\,[Q(0)+Q(1)]$ — целое число.

Положим

$$A = \pi\, m^k \int\limits_0^1 P(x)\, \sin \pi x\, dx.$$

Согласно лемме

$$A = m^k\, \bigl[Q(0)+Q(1)\bigr],$$

так что A — целое число. Вместе с тем, согласно (1)

$$0 < A \leqslant \pi\, m^k \int\limits_0^1 P(x)\, dx \leqslant \frac{\pi\, m^k}{k!} < 1.$$

Получили противоречие. Иррациональность π установлена. □

4°. Число π имеет богатую историю. Основные события этой истории отражены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухштаб А. А. *Теория чисел.* Изд. 2-е. М.: Просвещение, 1966. 384 с.

2. Жуков А. В. *О числе* π. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. 32 с.