СИСТЕМЫ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ И ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ*

В. Н. Малозёмов А. Б. Певный

malv@math.spbu.ru pevnyi@syktsu.ru

28 февраля 2007 г.

Данный доклад примыкает к докладу [1].

1°. Напомним [2, с. 99–100], что жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$ называется набор векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, такой, что при некотором $A > 0$ (константа фрейма) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \big(\langle x, \varphi_k \rangle\big)^2 = A\,\|x\|^2. \tag{1}$$

Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Для неё

$$\|\Phi^T x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \big(\langle x, \varphi_k \rangle\big)^2.$$

Поскольку

$$\|\Phi^T x\|^2 = \langle \Phi^T x, \Phi^T x \rangle = \langle \Phi\,\Phi^T x, x \rangle,$$

то равенство (1) можно переписать в виде

$$\langle \Phi\,\Phi^T x, x \rangle = \langle A\,I_n\,x, x \rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Формула (2) равносильна матричному равенству

$$\Phi\,\Phi^T = A\,I_n\,. \tag{3}$$

Умножив (3) на x, придём к эквивалентному векторному равенству

$$x = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varphi_k \rangle\, \varphi_k \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Таким образом, формулы (1), (3), (4) дают эквивалентные определения жёсткого фрейма в $\mathbb{R}^n$ с константой $A > 0$.

Если обозначить через $\mathrm{tr}(\Phi\Phi^T)$ сумму диагональных элементов квадратной матрицы $\Phi\Phi^T$, то в силу (3) получим

$$\mathrm{tr}(\Phi\Phi^T) = \mathrm{tr}(A\,I_n) = n\,A.$$

Вместе с тем, как нетрудно проверить, $\mathrm{tr}(\Phi\Phi^T) = \mathrm{tr}(\Phi^T\Phi)$, поэтому

$$nA = \mathrm{tr}(\Phi^T\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2.$$

Отсюда следует, что константа фрейма A необходимо равна такой величине:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2. \tag{5}$$

Наша цель — дать полное описание множества жёстких фреймов в простейшем частном случае, когда $m = n+1$ и все векторы φ_k имеют единичную длину. В приводимом ниже анализе важную промежуточную роль будут играть так называемые *системы Мерседес-Бенц* [1].

2°. Набор n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ называется системой Мерседес-Бенц, если выполнены условия

$$\langle\varphi_k, \varphi_j\rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{при } k \neq j; \qquad \|\varphi_k\| = 1 \quad \text{при } k \in 1:n+1. \tag{6}$$

В [1] индуктивно построена одна такая система $\{b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ (верхний индекс указывает на размерность вектора).

В общем случае для любой системы Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k = \mathbb{O}. \tag{7}$$

Действительно,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n+1}\varphi_k\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{k=1}^{n+1}\varphi_k, \sum_{j=1}^{n+1}\varphi_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\langle\varphi_k,\varphi_j\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}\|\varphi_k\|^2 + \sum_{k\neq j}\langle\varphi_k,\varphi_j\rangle = n+1 - \tfrac{1}{n}\big[(n+1)^2 - (n+1)\big] = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы набор n-мерных векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ был системой Мерседес-Бенц, необходимо и достаточно, чтобы нашлась ортогональная $(n \times n)$-матрица U, такая, что*

$$\varphi_k = U\, b_k^n\,, \qquad k \in 1 : n+1. \tag{8}$$

Доказательство. Достаточность следует из (6), если учесть, что для ортогональной матрицы U выполняются соотношения

$$U\,U^T = U^T U = I_n\,.$$

Необходимость. Наряду с матрицей $\varPhi$ со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ введём матрицу B со столбцами $b_1^n, \dots, b_{n+1}^n$. Тогда (8) можно переписать в виде

$$\varPhi = UB. \tag{9}$$

Равенство (9) будем рассматривать как уравнение относительно U.

Добавим к $(n \times (n+1))$-матрицам $\varPhi$ и B $(n+1)$-ю строку, все компоненты которой равны $1/\sqrt{n}$. Получившиеся квадратные матрицы обозначим $\varPhi_0$ и B_0. Из определения систем Мерседес-Бенц следует, что

$${\varPhi_0}^T \varPhi_0 = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) I_{n+1}\,, \qquad {B_0}^T B_0 = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) I_{n+1}\,.$$

Положим $P = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\varPhi_0$, $Q = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,B_0$. Поскольку $P^T P = I_{n+1}$, $Q^T Q = I_{n+1}$, то матрицы P и Q являются ортогональными.

Построим ортогональную матрицу U_0, такую, что

$$\varPhi_0 = U_0\, B_0\,. \tag{10}$$

После умножения на $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ придём к равносильному уравнению $P = U_0\, Q$ с очевидным решением $U_0 = P\, Q^T$. Ясно, что U_0 — ортогональная матрица.

Покажем, что U_0 имеет вид

$$U_0 = \begin{bmatrix} U & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Согласно (7)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k^n = \mathbb{O},$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
U_0[i, n+1] &= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_0[i,k] \times {B_0}^T[k, n+1] = \\
&= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(i)\, \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{при } i \in 1:n, \\
U_0[n+1, n+1] &= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_0[n+1,k] \times {B_0}^T[k, n+1] = 1, \\
U_0[n+1, j] &= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_0[n+1,k] \times B_0[j,k] = \\
&= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, b_k^n(j) = 0 \qquad \text{при } j \in 1:n.
\end{aligned}
$$

Формула (11) установлена. Учитывая, что

$$
U_0\, {U_0}^T = \begin{bmatrix} U\, U^T & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 1 \end{bmatrix}
$$

и $U_0\, {U_0}^T = I_{n+1}$, заключаем, что U — ортогональная матрица.

Из (10) и (11) следует (9). Теорема доказана. □

3°. Теперь обратимся к описанию множества жёстких фреймов в $\mathbb{R}^n$, состоящих из $n+1$ единичных векторов. В этом случае, согласно (5), $A = 1 + \frac{1}{n}$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы набор единичных n-мерных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ был жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$
\varphi_k = \sigma_k\, U\, b_k^n\,, \qquad k \in 1 : n+1, \tag{12}
$$

где $\sigma_k = \pm 1$ и U — некоторая ортогональная матрица.

Доказательство. Достаточность. В [1] установлено, что система $\{b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$ с константой $A = 1 + \frac{1}{n}$. То же самое можно сказать и о системе (12), поскольку

$$
\sum_{k=1}^{n+1} \big(\langle x, \varphi_k\rangle\big)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \big(\langle x, U\, b_k^n\rangle\big)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \big(\langle U^T x, b_k^n\rangle\big)^2 =
$$
$$
= \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\|U^T x\|^2 = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)\|x\|^2.
$$

Необходимость. Как обычно, через Φ обозначим матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$. В силу (3) и (5)

$$\Phi \Phi^T = \bigl(1 + \tfrac{1}{n}\bigr)\, I_n \,. \tag{13}$$

Рассмотрим Φ как набор $(n+1)$-мерных строк $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Согласно (13)

$$\langle \gamma_j, \gamma_k \rangle = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{при } k = j, \\ \quad 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Дополним Φ ещё одной строкой γ_{n+1} так, чтобы

$$\langle \gamma_j, \gamma_{n+1} \rangle = 0 \quad \text{при } j \in 1:n, \qquad \|\gamma_{n+1}\|^2 = 1 + \tfrac{1}{n}\,.$$

Расширенную матрицу обозначим Φ_1. Для неё

$$\Phi_1 \Phi_1{}^T = \bigl(1 + \tfrac{1}{n}\bigr)\, I_{n+1}\,.$$

Матрица $P = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\Phi_1$ является ортогональной, так как $P\,P^T = I_{n+1}$. Но тогда и $P^T P = I_{n+1}$, откуда следует, что

$$\Phi_1{}^T \Phi_1 = \bigl(1 + \tfrac{1}{n}\bigr)\, I_{n+1}\,. \tag{14}$$

В частности,

$$\bigl(\Phi_1{}^T \Phi_1\bigr)[k,k] = \sum_{j=1}^{n+1} \bigl(\Phi_1[j,k]\bigr)^2 = 1 + \tfrac{1}{n}, \qquad k \in 1 : n+1. \tag{15}$$

В то же время

$$\sum_{j=1}^{n} \bigl(\Phi_1[j,k]\bigr)^2 = \|\varphi_k\|^2 = 1, \qquad k \in 1 : n+1. \tag{16}$$

Вычитая (16) из (15), получаем $\bigl(\Phi_1[n+1,k]\bigr)^2 = \frac{1}{n}$. Значит,

$$\gamma_{n+1}(k) = \frac{\sigma_k}{\sqrt{n}}\,, \qquad k \in 1 : n+1,$$

где $\sigma_k = \pm 1$. Так выглядит добавленная строка.

Введём диагональную матрицу $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ и положим

$$\Phi_0 = \Phi_1 D.$$

У матрицы $\varPhi_0$ k-й столбец равен $(\sigma_k\,\varphi_k, \frac{1}{\sqrt{n}})^T$. Согласно (14)

$$\varPhi_0{}^T\varPhi_0 = D\,\varPhi_1{}^T\varPhi_1 D = \left(1+\tfrac{1}{n}\right) I_{n+1}\,. \tag{17}$$

Обозначим $v_k = \sigma_k\,\varphi_k$ и перепишем (17) в виде

$$\sum_{l=1}^{n} v_j(l)\,v_k(l) + \tfrac{1}{n} = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & \text{при } k=j,\\ 0 & \text{при } k\neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\langle v_j, v_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } k=j,\\ -\frac{1}{n} & \text{при } k\neq j. \end{cases}$$

По определению, $\{v_1,\ldots,v_{n+1}\}$ — система Мерседес-Бенц.

На основании теоремы 1 заключаем, что существует ортогональная матрица U, такая, что $v_k = U\,b_k^n$. Поскольку $v_k = \sigma_k\,\varphi_k$, то

$$\varphi_k = \sigma_k\,U\,b_k^n\,, \qquad k\in 1:n+1.$$

Теорема доказана. □

4°. Дальнейшая информация о жёстких фреймах в конечномерных пространствах имеется в [3–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве* // http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/ Избранные доклады. 16 января 2007 г.

2. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

3. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. 2004. V. 345. P. 61–86.

4. Goyal V. K., Kovačevič J., Kelner J. A. *Quantized frame expansions with erasures* // Appl. and Comput. Harmonic Anal. 2001. V. 10. No. 3. P. 203–233.

5. Han D., Larson D. R. *Frames, bases and group representation* // Memoires of Amer. Math. Soc. 2000. V. 147. No. 697. P. 1–94.