МАКСИМАЛЬНАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ*

А. М. Дурягин

duriagin@syktsu.ru

28 марта 2008 г.

Аннотация

Из комплексной матрицы Фурье порядка m выбираются первые $k+1$ строк и последние k строк. К столбцам получившейся матрицы размера $(2k+1)\times m$ применяется специальное унитарное преобразование, приводящее к вещественным векторам. Они и образуют вещественный гармонический фрейм, обладающий свойством максимальной избыточности. Такая конструкция впервые появилась в статье [1].

1°. Предварительные сведения. Через Φ будем обозначать систему из m векторов в пространстве $\mathbb{C}^n$. Система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{C}^n$ называется фреймом, если существуют константы $A, B > 0$, такие, что

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \bigl|\langle x, \varphi_i\rangle\bigr|^2 \leqslant B\,\|x\|^2$$

для любого $x \in \mathbb{C}^n$.

Если $A = B$, то Φ — жёсткий фрейм. Система Φ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка $\mathcal{L}(\Phi)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^n$ (см. доклад [2]).

Если Φ — фрейм, то $m \geqslant n$.

При $m = n$ система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ только в том случае, если $\mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \mathbb{C}^n$. Это выполняется тогда и только тогда, когда векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы, а это равносильно тому, что матрица Φ со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ невырождена.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

2°. Фреймы с максимальной избыточностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Phi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$, $m > n$, — фрейм в $\mathbb{C}^n$. Говорят, что Φ обладает *максимальной избыточностью*, если при удалении любых $m - n$ элементов оставшиеся n элементов будут линейно независимыми.

Рассмотрим матрицу Фурье $F_m = \{\omega_m^{kl}\}_{k,l=0}^{m-1} = F_m[M, M]$, где $\omega_m = e^{2\pi i/m}$.

Пусть $n \leqslant m$. При $n = 2k+1$ возьмём индексное множество N следующего вида

$$N = \bigl\{0, \ldots, k, m-k, \ldots, m-1\bigr\}. \qquad (1)$$

ЛЕММА. *Столбцы матрицы $F_m[N, M]$ образуют жёсткий фрейм в $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство следует из того, что

$$F_m[N, M] F_m^*[M, N] = m I_n\,, \qquad (2)$$

где $*$ обозначает эрмитово сопряжение.

Замечание. Лемма остаётся справедливой при любом выборе индексного множества N с $|N| = n$. Но в дальнейшем будет важно, что индексное множество N имеет вид (1).

3°. Конструкция гармонического фрейма в случае нечётного $\boldsymbol{n}$. Пусть $n = 2k+1$. Рассмотрим матрицу

$$U[N, N] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_k/\sqrt{2} & J_k/\sqrt{2} \\ \mathbb{O} & -iI_k/\sqrt{2} & iJ_k/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

где

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_k = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить равенство $UU^* = I_n$, так что U — унитарная матрица.

Представим матрицу $F_m[N, M]$ как набор столбцов

$$F_m[N, M] = \bigl[\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\bigr],$$

где $\varphi_s \in \mathbb{C}^n$. Компоненты $\varphi_s[N]$ имеют вид

$$\varphi_s[N] = \bigl(1, \omega_m^s, \omega_m^{2s}, \ldots, \omega_m^{ks}, \omega_m^{(m-k)s}, \ldots, \omega_m^{(m-1)s}\bigr)^T.$$

Оказывается, что при умножении векторов φ_s на матрицу U получаются вещественные векторы. Эти векторы образуют жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$, который называется вещественным гармоническим фреймом.

ТЕОРЕМА 1. *Векторы* $f_s = U\varphi_s$, $s \in 0 : m-1$, *образуют жёсткий фрейм в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Покажем сначала, что столбцы матрицы $D = [f_0, \ldots, f_{m-1}]$ образуют жёсткий фрейм. Действительно, $D = [U\varphi_0, \ldots, U\varphi_{m-1}] = UF_m[N, M]$. Отсюда следует, что

$$DD^* = U\,F_m[N,M]\,F_m^*[M,N]\,U^* = U\,mI_n\,U^* = mI_n\,.$$

Теперь покажем, что компоненты вектора $f_s[N] = U\varphi_s[N]$ при $s \in 0 : m-1$ вещественные.

При умножении первой строки матрицы U на вектор $\varphi_s[N]$ получим компоненту $f_s[0] = 1$. При умножении матрицы $[\mathbb{O}, I_k/\sqrt{2}, J_k/\sqrt{2}]$ на вектор $\varphi_s[N]$ получим компоненты

$$f_s[l] = \frac{\omega_m^{ls} + \omega_m^{(m-l)s}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cos\frac{2ls\pi}{m}\,, \quad l \in 1 : k.$$

При умножении матрицы $[\mathbb{O}, -iI_k/\sqrt{2}, iJ_k/\sqrt{2}]$ на вектор $\varphi_s[N]$ получим компоненты

$$f_s[m-k-1+l] = \frac{-i\,\omega_m^{ls} + i\,\omega_m^{(m-l)s}}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_m^{ls} - \omega_m^{-ls}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{2ls\pi}{m}\,, \quad l \in 1 : k.$$

Таким образом, все компоненты векторов f_s вещественные. Система $\{f_s\}_{s=0}^{m-1}$ образует вещественный жёсткий фрейм. $\square$

Замечание. В теореме попутно найден явный вид компонент векторов f_s:

$$f_s = \Big(1, \sqrt{2}\cos\frac{2s\pi}{m}, \ldots, \sqrt{2}\cos\frac{2ks\pi}{m}, \sqrt{2}\sin\frac{2s\pi}{m}, \ldots, \sqrt{2}\sin\frac{2ks\pi}{m}\Big)^T,$$

где $s \in 0 : m-1$ и $n = 2k+1$. Нормированные векторы $f_s/\sqrt{n}$ полностью совпадают с векторами из доклада [3].

ПРИМЕР. Возьмем $k = 1$, $n = 3$, $m = 5$. Тогда $N = \{0, 1, 4\}$. Унитарная матрица U примет вид

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\varphi_s = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_5^s \\ \omega_5^{4s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_5^s \\ \omega_5^{-s} \end{bmatrix}, \quad s \in 0 : 4,$$

и

$$f_s = U\varphi_s = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\omega_5^s+\omega_5^{-s}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i\omega_5^s+i\omega_5^{-s}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\cos\frac{2s\pi}{5} \\ \sqrt{2}\sin\frac{2s\pi}{5} \end{bmatrix}, \quad s \in 0:4.$$

4°. Конструкция гармонического фрейма в случае чётного $\boldsymbol{n}$. Пусть $n = 2k$. Возьмём множество $N = \{0, \ldots, k-1, m-k, \ldots, m-1\}$. Рассмотрим матрицу

$$U[N,N] = \begin{bmatrix} I_k/\sqrt{2} & J_k/\sqrt{2} \\ -iI_k/\sqrt{2} & iJ_k/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить равенство $UU^* = I_n$, так что U — унитарная матрица.

Представим матрицу $F_m[N,M]$ как набор столбцов

$$F_m[N,M] = \big[\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\big],$$

где $\varphi_s \in \mathbb{C}^n$. Компоненты $\varphi_s[N]$ имеют вид

$$\varphi_s[N] = \big(1, \omega_m^s, \omega_m^{2s}, \ldots, \omega_m^{(k-1)s}, \omega_m^{(m-k)s}, \ldots, \omega_m^{(m-1)s}\big)^T.$$

Оказывается, что при умножении векторов φ_s с некоторыми коэффициентами на матрицу U получаются вещественные векторы. Эти векторы образуют вещественный жёсткий фрейм.

ТЕОРЕМА 2. *Векторы $f_s = U\omega_m^{s/2}\varphi_s$, $s \in 0 : m-1$, образуют жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Покажем сначала, что столбцы матрицы $D = [f_0, \ldots, f_{m-1}]$ образуют жёсткий фрейм. Действительно, $D = [U\omega_m^{0/2}\varphi_0, \ldots, U\omega_m^{(m-1)/2}\varphi_{m-1}] = UF_m[N,M]B[M,M]$, где $B[M,M] = \operatorname{diag}(1, \omega_m^{1/2}, \ldots, \omega_m^{(m-1)/2})$. Отсюда следует, что

$$DD^* = UF_m[N,M]B[M,M]B^*[M,M]F_m^*[M,N]U^* =$$
$$= UF_m[N,M]I_mF_m^*[M,N]U^* = UmI_nU^* = mI_n.$$

Теперь покажем, что компоненты вектора $f_s[N] = U\omega_m^{s/2}\varphi_s[N]$ при $s \in 0 : m-1$ вещественные.

При умножении матрицы $[I_k/\sqrt{2}, J_k/\sqrt{2}]$ на вектор $\omega_m^{s/2}\varphi_s[N]$ получим компоненты

$$f_s[l] = \frac{\omega_m^{s/2}}{\sqrt{2}}\big(\omega_m^{ls} + \omega_m^{(m-1-l)s}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\omega_m^{(2l+1)s/2} + \omega_m^{-(2l+1)s/2}\big) =$$
$$= \sqrt{2}\cos\frac{(2l+1)s\pi}{m}, \quad l \in 0 : k-1.$$

При умножении матрицы $[-iI_k/\sqrt{2},\ iJ_k/\sqrt{2}]$ на вектор $\omega_m^{s/2}\varphi_s[N]$ получим компоненты

$$f_s[m-k-1+l] = -i\,\frac{\omega_m^{s/2}}{\sqrt{2}}\left(\omega_m^{ls} - \omega_m^{(m-1-l)s}\right) =$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\omega_m^{(2l+1)s/2} - \omega_m^{-(2l+1)s/2}\right) = \sqrt{2}\,\sin\frac{(2l+1)s\pi}{m}, \quad l \in 1:k.$$

Таким образом, все компоненты векторов f_s вещественные. Система $\{f_s\}_{s=0}^{m-1}$ образует вещественный жёсткий фрейм. $\square$

З а м е ч а н и е. В теореме попутно найден явный вид компонент векторов f_s:

$$f_s = \left(\sqrt{2}\cos\frac{s\pi}{m}, \ldots, \sqrt{2}\cos\frac{(2k+1)s\pi}{m}, \sqrt{2}\sin\frac{s\pi}{m}, \ldots, \sqrt{2}\sin\frac{(2k+1)s\pi}{m}\right)^T,$$

где $s \in 0 : m-1$ и $n = 2k$. Нормированные векторы $f_s/\sqrt{n}$ полностью совпадают с векторами из доклада [3].

5°. Максимальная избыточность вещественного гармонического фрейма. Следующая теорема для нечётного n установлена в [1]. Нам удалось найти более простое её доказательство и доказать теорему для чётного n.

ТЕОРЕМА 3. *Фрейм $\{f_s\}_{s=0}^{m-1}$ обладает максимальной избыточностью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем теорему при нечётном n.

Выберем произвольное множество $J \subset M$ с $\left|J\right| = n$. Рассмотрим матрицу $D[N, J] = UF_m[N, J]$. Нужно доказать, что эта матрица невырождена.

Унитарная матрица является неособенной. Введём матрицу $A[J, N] = F_m^*[J, N]$. Эта матрица имеет элементы

$$A[j, l] = \overline{F_m[l, j]} = \omega_m^{-lj}, \quad j \in J,\ \ l \in N.$$

Покажем, что она невырождена.

Рассмотрим однородную систему

$$A[J, N]\, c[N] = \mathbb{O}[J]. \tag{3}$$

Нужно доказать, что эта система имеет только нулевое решение.

Пусть $c[N]$ решение системы. Тогда

$$\sum_{l\in N} \omega_m^{-lj}\, c[l] = 0, \quad j \in J. \tag{4}$$

Поскольку $N = \{0, 1, \ldots, k, m-k, \ldots, m-1\}$, то

$$\sum_{l=0}^{k} \omega_m^{-lj}\, c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m-l]\, \omega_m^{-j(m-l)} = 0, \quad j \in J. \tag{5}$$

Домножим j-е равенство на ω_m^{jk}. Получим

$$\sum_{l=0}^{k} \omega_m^{j(k-l)}\, c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m-l]\, \omega_m^{j(k+l)} = 0, \quad j \in J. \tag{6}$$

Рассмотрим полином

$$P(z) = \sum_{l=0}^{k} z^{k-l}\, c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m-l]\, z^{k+l} =$$
$$= c[0]z^k + c[1]z^{k-1} + \cdots + c[k]z^0 +$$
$$+ c[m-1]z^{k+1} + c[m-2]z^{k+2} + \cdots + c[m-k]z^{2k}.$$

Его степень не выше $2k = n-1$. В силу равенства (6) полином $P(z)$ имеет n корней $z_j = \omega_m^j = e^{i2\pi j/m}$, $j \in J$. Здесь $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$, при этом $0 \leqslant j_1 < \cdots < j_n \leqslant m-1$. Значит, все корни z_j различны. Приходим к тождеству $P(z) \equiv 0$, из которого следует, что $c[l] = 0$ при всех $l \in N$.

Установлено, что система (3) имеет только нулевое решение. Это гарантирует невырожденность матриц $A[N, J]$ и $D[N, J]$.

Теперь приведём доказательство теоремы для чётного n. Рассмотрим матрицу $D = UF_m[N, M]B[M, M]$, где $B[M, M] = \mathrm{diag}(1, \omega_m^{1/2}, \ldots, \omega_m^{(m-1)/2})$.

Выберем произвольное множество $J \subset M$ с $\bigl|J\bigr| = n$. Рассмотрим матрицу $D[N, J] = UF_m[N, M]B[M, J]$. Отметим, что $B[M \setminus J, J]$ — нулевая матрица, поэтому $D[N, J] = UF_m[N, J]B[J, J]$.

Достаточно проверить, что матрица $A[J, N] = F_m^*[J, N]$ невырождена.

Рассмотрим однородную систему

$$A[J, N]\, c[N] = \mathbb{O}[J]. \tag{7}$$

Пусть $c[N]$ решение системы. Тогда

$$\sum_{l \in N} \omega_m^{-lj}\, c[l] = 0, \quad j \in J. \tag{8}$$

Поскольку $N = \{0, 1, \ldots, k-1, m-k, \ldots, m-1\}$, то

$$\sum_{l=0}^{k-1} \omega_m^{-lj}\, c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m-l]\, \omega_m^{-j(m-l)} = 0, \quad j \in J. \tag{9}$$

Домножим j-е равенство на $\omega_m^{j(k-1)}$. Получим

$$\sum_{l=0}^{k-1} \omega_m^{j(k-l-1)}\, c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m-l]\, \omega_m^{j(k+l-1)} = 0, \quad j \in J. \tag{10}$$

Рассмотрим полином

$$P(z) = \sum_{l=0}^{k-1} z^{k-l-1}\, c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m-l]\, z^{k+l-1} =$$
$$= c[0]z^{k-1} + \cdots + c[k-1]z^0 + c[m-1]z^k + \cdots + c[m-k]z^{2k-1}.$$

Его степень не выше $2k-1 = n-1$. В силу равенства (10) полином $P(z)$ имеет n различных корней $z_j = \omega_m^j$, $j \in J$. Следовательно, $P(z) \equiv 0$ и, значит, $c[l] = 0$ при всех $l \in N$.

Установлено, что система (7) имеет только нулевое решение. Это гарантирует невырожденность матриц $A[J,N]$ и $D[N,J]$. □

Замечание. Может возникнуть гипотеза, что при любом выборе индексных множеств

$$N \subset M, \quad J \subset M, \quad |N| = |J| = n < m$$

матрица $F_m[N,J]$ будет невырожденной. Однако это не так, как показывает следующий пример.

Пусть $n = 2$, $m = 4$. Возьмём $N = J = \{1, 3\}$. Тогда

$$F_4[N,J] = \begin{bmatrix} \omega_4^1 & \omega_4^3 \\ \omega_4^3 & \omega_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_4^1 & \omega_4^3 \\ \omega_4^3 & \omega_4^1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\det(F_4[N,J]) = \omega_4^2 - \omega_4^6 = 0$, то есть матрица $F_4[N,J]$ вырождена.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Püschel, J. Kovačevič. *Real, Tight Frames with Maximal Robustness to Erasures* // Data Compression Conference, 2005. Proceedings. P. 63–72.

2. Певный А. Б. *Гармонические фреймы — фреймы с максимальной избыточностью* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные докдады. 28 марта 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0328`).

3. Дурягин А. М., Соловьёва Н. А. *Вещественные гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#1009`).