К ТЕОРЕМЕ О МИНИМАКСЕ*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

22 сентября 2012 г.

1°. Имеется в виду следующий вариант теоремы о минимаксе.

ТЕОРЕМА. *Пусть P и Q — выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно и $f(x, y)$ — функция, заданная и непрерывная на декартовом произведении $P \times Q$, выпуклая по x при каждом фиксированном y и вогнутая по y при каждом фиксированном x. Тогда*

$$\min_{x \in P} \max_{y \in Q} f(x, y) = \max_{y \in Q} \min_{x \in P} f(x, y).$$

Существует несколько доказательств этой замечательной теоремы (см., например, [1], с. 42-45). Я приведу усовершенствованный вариант доказательства из моей работы [2], опубликованной в 1973 г.

2°. Введём функцию

$$\varphi(x) = \max_{y \in Q} f(x, y)$$

и множества

$$R(x) = \big\{ y \in Q \mid f(x, y) = \varphi(x) \big\},$$
$$R_\varepsilon(x) = \big\{ y \in Q \mid \varphi(x) - f(x, y) \leqslant \varepsilon \big\}.$$

Очевидно, что $R(x) \subset R_\varepsilon(x)$ при всех $\varepsilon > 0$ и $x \in P$.

ЛЕММА 1. *По $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при любых x, $\hat{x}$ из P со свойством $\|x - \hat{x}\| \leqslant \delta$ выполняется соотношение*

$$R(x) \subset R_\varepsilon(\hat{x}).$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доказательство. Воспользуемся равномерной непрерывностью функции $f(x,y)$ на компактном множестве $P \times Q$, согласно которой по $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что

$$\max_{y \in Q} \bigl| f(x,y) - f(\hat{x},y) \bigr| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

при всех x, $\hat{x}$ из P со свойством $\|x - \hat{x}\| \leqslant \delta$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\bigl|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})\bigr| = \bigl|\max_{y \in Q} f(x,y) - \max_{y \in Q} f(\hat{x},y)\bigr| \leqslant \max_{y \in Q} \bigl| f(x,y) - f(\hat{x},y)\bigr| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Возьмём $y \in R(x)$. По определению $f(x,y) = \varphi(x)$. На основании (1) и (2) получаем

$$\varphi(\hat{x}) - f(\hat{x},y) = -\bigl[\varphi(x) - \varphi(\hat{x})\bigr] + \bigl[f(x,y) - f(\hat{x},y)\bigr] \leqslant \varepsilon,$$

то есть $y \in R_\varepsilon(\hat{x})$. Лемма доказана. □

Отметим, что в лемме 1 использовалась только непрерывность функции $f(x,y)$.

3°. Функция максимума $\varphi(x)$ непрерывна на компактном множестве P, поэтому у неё существует точка минимума x_* на P. По определению

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_*) \qquad \forall x \in P.$$

Очевидным достаточным условием оптимальности x_* служит неравенство

$$\max_{y \in R(x_*)} \bigl[f(x,y) - f(x_*,y)\bigr] \geqslant 0 \qquad \forall x \in P \tag{3}$$

(учесть, что $f(x_*,y) = \varphi(x_*)$ при всех $y \in R(x_*)$). Это утверждение справедливо для любой непрерывной функции $f(x,y)$. Удивительно, что неравенство (3) является и необходимым условием оптимальности x_* в случае выпуклости функции $f(x,y)$ по x при каждом фиксированном y.

ЛЕММА 2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $P \times Q$ и выпукла по x при каждом фиксированном y. Тогда в точке минимума x_* функции $\varphi(x)$ выполняется неравенство* (3).

Доказательство. Зафиксируем $x \in P$. В силу выпуклости функции f по первому аргументу при $\alpha \in (0,1)$ имеем

$$f\bigl(x_* + \alpha(x - x_*), y\bigr) \leqslant f(x_*,y) + \alpha\bigl[f(x,y) - f(x_*,y)\bigr].$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon > 0$

$$\max_{y\in R_\varepsilon(x_*)} f\bigl(x_* + \alpha(x - x_*), y\bigr) \leqslant \varphi(x_*) + \alpha \max_{y\in R_\varepsilon(x_*)} \bigl[f(x, y) - f(x_*, y)\bigr].$$

По лемме 1

$$R\bigl(x_* + \alpha(x - x_*)\bigr) \subset R_\varepsilon(x_*) \quad \text{при} \quad \bigl\|\alpha(x - x_*)\bigr\| \leqslant \delta,$$

так что при малых $\alpha > 0$

$$\varphi\bigl(x_* + \alpha(x - x_*)\bigr) \leqslant \varphi(x_*) + \alpha \max_{y\in R_\varepsilon(x_*)} \bigl[f(x, y) - f(x_*, y)\bigr].$$

Воспользовавшись тем, что x_* — точка минимума функции $\varphi(x)$ на P, придём к неравенству

$$\max_{y\in R_\varepsilon(x_*)} \bigl[f(x, y) - f(x_*, y)\bigr] \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь ε — произвольное положительное число и x — фиксированная точка из P. Множество $R_\varepsilon(x_*)$ компактно, поэтому максимум в левой части (4) достигается.

Покажем, что из (4) следует (3). Возьмём последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_\nu\}$, стремящуюся к нулю. В силу (4) при каждом ν найдётся точка $y_\nu \in R_{\varepsilon_\nu}(x_*)$, в которой

$$f(x, y_\nu) - f(x_*, y_\nu) \geqslant 0. \tag{5}$$

Условие $y_\nu \in R_{\varepsilon_\nu}(x_*)$ означает, что

$$\varphi(x_*) - f(x_*, y_\nu) \leqslant \varepsilon_\nu. \tag{6}$$

Точки y_ν принадлежат компактному множеству Q, поэтому из последовательности $\{y_\nu\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что вся последовательность $\{y_\nu\}$ при $\nu \to \infty$ сходится к точке $y_* \in Q$. Переходя в (5) и (6) к пределу при $\nu \to \infty$, получаем

$$f(x, y_*) - f(x_*, y_*) \geqslant 0, \qquad y_* \in R(x_*).$$

Тем более

$$\max_{y\in R(x_*)} \bigl[f(x, y) - f(x_*, y)\bigr] \geqslant 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2 представляет самостоятельный интерес. В [2] показано, как на её основе выводятся критерии оптимальности в задачах наилучшего равномерного приближения непрерывной функции обобщёнными полиномами и обобщёнными дробно-рациональными функциями.

4°. Переходим к доказательству теоремы о минимаксе. Вначале предположим, что функция $f(x,y)$ *строго* вогнута по y при каждом фиксированном x. В этом случае множество $R(x_*)$ состоит из единственной точки. Обозначим её y_*. По лемме 2

$$f(x,y_*) \geqslant f(x_*,y_*) \qquad \forall x \in P.$$

Как следствие,

$$\min_{x\in P} f(x,y_*) \geqslant f(x_*,y_*).$$

Вместе с тем, по определению $R(x_*)$

$$f(x_*,y_*) = \max_{y\in Q} f(x_*,y).$$

Значит,

$$\min_{x\in P} f(x,y_*) \geqslant \max_{y\in Q} f(x_*,y).$$

Усилим это неравенство

$$\max_{y\in Q}\min_{x\in P} f(x,y) \geqslant \min_{x\in P}\max_{y\in Q} f(x,y). \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что справедливо и обратное к (7) неравенство. Действительно, при всех $x \in P$, $y \in Q$ имеем

$$\min_{u\in P} f(u,y) \leqslant f(x,y) \leqslant \max_{v\in Q} f(x,v),$$

так что

$$\min_{u\in P} f(u,y) \leqslant \max_{v\in Q} f(x,v).$$

При фиксированном $x \in P$ получаем

$$\max_{y\in Q}\min_{u\in P} f(u,y) \leqslant \max_{v\in Q} f(x,v),$$

откуда следует, что

$$\max_{y\in Q}\min_{u\in P} f(u,y) \leqslant \min_{x\in P}\max_{v\in Q} f(x,v). \tag{8}$$

Объединяя неравенства (7) и (8), приходим к требуемому равенству

$$\max_{y\in Q}\min_{x\in P} f(x,y) = \min_{x\in P}\max_{y\in Q} f(x,y). \tag{9}$$

5°. Пока мы предполагали, что функция $f(x, y)$ *строго* вогнута по y при каждом фиксированном x. Теперь будем считать, что функция $f(x, y)$ просто вогнута по y при каждом фиксированном x.

При $\varepsilon > 0$ введём вспомогательную функцию

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) - \varepsilon \|y\|^2,$$

которая *строго* вогнута по y при каждом фиксированном x. В силу (9)

$$\max_{y \in Q} \min_{x \in P} f_\varepsilon(x, y) = \min_{x \in P} \max_{y \in Q} f_\varepsilon(x, y). \tag{10}$$

Найдём пределы левой и правой частей этого равенства при $\varepsilon \to +0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \Big|\max_{y \in Q} \min_{x \in P} f_\varepsilon(x, y) - \max_{y \in Q} \min_{x \in P} f(x, y)\Big| &\leqslant \\ \leqslant \max_{y \in Q} \Big|\min_{x \in P} f_\varepsilon(x, y) - \min_{x \in P} f(x, y)\Big| &\leqslant \\ \leqslant \max_{y \in Q} \max_{x \in P} \Big|f_\varepsilon(x, y) - f(x, y)\Big| &= \varepsilon \max_{y \in Q} \|y\|^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично выводится неравенство

$$\Big|\min_{x \in P} \max_{y \in Q} f_\varepsilon(x, y) - \min_{x \in P} \max_{y \in Q} f(x, y)\Big| \leqslant \varepsilon \max_{y \in Q} \|y\|^2. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что при $\varepsilon \to +0$ левая и правая части равенства (10) стремятся соответственно к левой и правой частям равенства (9). Таким образом, формула (9) получается в результате предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (10).

Теорема доказана. $\square$

6°. Детальный анализ более общих теорем о минимаксе имеется в книге [3], с. 238–267.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* М.: Мир, 1964. 835 с.

2. Малозёмов В. Н. *Необходимые и достаточные условия минимакса* / В сб.: Оптимизация. Вып. 10 (27). Новосибирск, 1973. С. 85–97.

3. Воробьёв Н. Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* М.: Наука, 1984. 496 с.