ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ С. К. МЫШКОВА*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

20 июня 2013 г.

Обозначим через Λ стандартный симплекс в $\mathbb{R}^m$ — множество векторов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1; \quad \lambda_i \geqslant 0,\ i \in 1:m.$$

Пусть $f_i(x)$, $i \in 1:m$, — непрерывные функции на некотором компактном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

С. К. Мышков в приватном разговоре задал вопрос: *справедливо ли равенство*

$$\min_{x\in\Omega} \max_{i\in 1:m} f_i(x) = \max_{\lambda\in\Lambda} \min_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(x)\ ? \tag{1}$$

Вопрос не лишён смысла, поскольку неравенство

$$\min_{x\in\Omega} \max_{i\in 1:m} f_i(x) \geqslant \max_{\lambda\in\Lambda} \min_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(x) \tag{2}$$

выполняется. Это легко проверить. Действительно, при всех $x \in \Omega$ и $\lambda \in \Lambda$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(x) \leqslant \max_{i\in 1:m} f_i(x). \tag{3}$$

Возьмём минимум по $x \in \Omega$ сначала в левой части неравенства (3), а затем в правой. При всех $\lambda \in \Lambda$ получим

$$\min_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(x) \leqslant \min_{x\in\Omega} \max_{i\in 1:m} f_i(x). \tag{4}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Отсюда очевидным образом следует неравенство (2).

К сожалению, это неравенство может выполняться как строгое.

ПРИМЕР. Рассмотрим две функции $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = \cos x$ на отрезке $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно (см. рис. 1), что

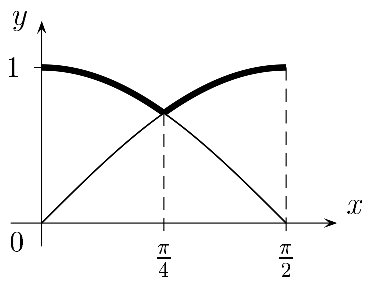

Рис. 1

$$\min_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \max\bigl\{f_1(x),\, f_2(x)\bigr\} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (5)$$

Обозначим

$$F(x, \lambda) = \lambda_1\, f_1(x) + \lambda_2\, f_2(x)$$

и покажем, что

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \min_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} F(x, \lambda) = \tfrac{1}{2}. \qquad (6)$$

Запишем

$$F(x, \lambda) = \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \sin x + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \cos x\right).$$

Коэффициенты у $\sin x$ и $\cos x$ неотрицательные и сумма их квадратов равна единице. Значит, найдётся единственный угол $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, такой, что

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \cos\alpha, \qquad \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \sin\alpha. \qquad (7)$$

Выражение для $F(x, \lambda)$ преобразуется к виду

$$F(x, \lambda) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\, \sin(x + \alpha).$$

При $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ аргумент $x + \alpha$ изменяется от α до $\frac{\pi}{2} + \alpha$, при этом $\frac{\pi}{2} + \alpha \leqslant \pi$. Учитывая строгую вогнутость функции $\sin x$ на $[0, \pi]$, заключаем, что минимум $\sin(x + \alpha)$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ достигается на концах этого отрезка (см. рис. 2). Как следствие

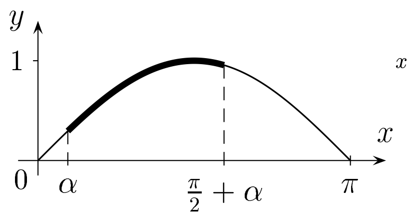

Рис. 2

$$\min_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} F(x, \lambda) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\, \min\bigl\{\sin\alpha,\, \sin(\tfrac{\pi}{2} + \alpha)\bigr\} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\, \min\bigl\{\sin\alpha,\, \cos\alpha\bigr\}.$$

Формулы (7) позволяют записать

$$\min_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} F(x,\lambda) = \min\{\lambda_1,\lambda_2\}.$$

Теперь мы можем вычислить левую часть равенства (6). Для этого нужно решить экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\min\{\lambda_1,\lambda_2\} \to \max,\\ \lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_1\geqslant 0,\ \lambda_2\geqslant 0.\end{gathered}$$

Её решение очевидно: $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$. Действительно, имеем

$$1=\lambda_1+\lambda_2\geqslant 2\min\{\lambda_1,\lambda_2\},$$

так что $\min\{\lambda_1,\lambda_2\}\leqslant\frac{1}{2}$. Равенство в этом неравенстве при $\lambda\in\Lambda$ достигается только тогда, когда $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$.

Формула (6) установлена.

На основании (5) и (6) получаем

$$\min_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \max\bigl\{f_1(x),\ f_2(x)\bigr\} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} = \max_{\lambda\in\Lambda}\ \min_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \bigl\{\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)\bigr\}.$$

Пример показывает, что неравенство (2) может выполняться как строгое.

На вопрос С. К. Мышкова следует дать отрицательный ответ.