ОБ ОДНОМ КЛАССИЧЕСКОМ НЕРАВЕНСТВЕ*

В. Н. Малозёмов

malv@gamma.math.spbu.ru

28 февраля 2006 г.

1°. Функция $f(x) = -\ln x$ является строго выпуклой на полуоси $(0, +\infty)$, поскольку $f''(x) = 1/x^2 > 0$. Для неё выполняется неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)\,, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — фиксированные положительные числа, в сумме равные единице, и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные положительные числа. Более того, в силу строгой выпуклости $f(x)$ неравенство (1) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Как следствие получаем такой результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа, в сумме равные единице. Тогда для любых неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\,. \tag{2}$$

Неравенство (2) *выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Доказательство. Если хотя бы одно x_k равно нулю, то (2) очевидно. Если же все x_k положительны, то согласно (1)

$$-\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln(x_k) = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}\right).$$

Потенцируя, получаем (2).

При $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ неравенство (2) выполняется как равенство.

Допустим, наоборот, что (2) выполняется как равенство. Если хотя бы одно x_k равно нулю, то в силу положительности α_k все x_k равны нулю, так что

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Когда все x_k положительны, дело сводится к случаю равенства в (1). Но тогда, как отмечалось, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Предложение доказано. □

При $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1/n$ неравенство (2) принимает вид

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\,. \tag{3}$$

Это — классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Неравенство (3) выполняется как равенство лишь тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2°. Приведём более сложный пример на применение неравенства (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — векторы с неотрицательными компонентами и p, q — положительные числа, удовлетворяющие условию $1/p + 1/q = 1$. Тогда*

$$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q\,. \tag{4}$$

При ненулевых x, y неравенство (4) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_k^p}{\|x\|_p^p} = \frac{y_k^q}{\|y\|_q^q} \qquad \text{при всех } k \in 1:n. \tag{5}$$

Доказательство. Если один из векторов x, y равен нулю, то (4) очевидно. Допустим, что x, y — ненулевые векторы с неотрицательными компонентами. Имеем

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_p \, \|y\|_q} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k^p}{\|x\|_p^p}\right)^{1/p} \left(\frac{y_k^q}{\|y\|_q^q}\right)^{1/q}.$$

Согласно (2) при каждом $k \in 1:n$

$$\left(\frac{x_k^p}{\|x\|_p^p}\right)^{1/p} \left(\frac{y_k^q}{\|y\|_q^q}\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{x_k^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{y_k^q}{\|y\|_q^q}\,. \tag{6}$$

Учитывая это, получаем

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|_p \, \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

что соответствует (4).

При ненулевых x, y неравенство (4) выполняется как равенство лишь тогда, когда все неравенства (6) выполняются как равенства. Но это возможно только при выполнении условия (5).

Предложение доказано. □

Неравенство (4) называется неравенством Гёльдера. Мы акцентируем внимание на условии (5) обращения неравенства Гёльдера в равенство.

3°. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n} \to \max \tag{7}$$

при ограничениях

$$a_1 x_1^{\lambda_1} + a_2 x_2^{\lambda_2} + \cdots + a_n x_n^{\lambda_n} = A\,; \qquad x_k \geqslant 0, \quad k \in 1:n\,.$$

Здесь все параметры μ_k, λ_k, a_k, A положительны.

Обозначим

$$\theta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\lambda_k}\,, \qquad P = \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{\mu_k}{a_k \lambda_k}\Big)^{\mu_k/\lambda_k}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Задача* (7) *имеет единственное решение*

$$x_k^* = \Big(\frac{A\mu_k}{\theta\, a_k \lambda_k}\Big)^{1/\lambda_k}, \qquad k \in 1:n\,. \tag{8}$$

Максимальное значение целевой функции равно $P(A/\theta)^\theta$.

Доказательство. Имеем

$$x_k^{\mu_k} = \Big(\frac{a_k \lambda_k}{\mu_k}\, x_k^{\lambda_k}\Big)^{\mu_k/\lambda_k} \Big(\frac{\mu_k}{a_k \lambda_k}\Big)^{\mu_k/\lambda_k},$$

поэтому

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\mu_k} = P \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k \lambda_k}{\mu_k}\, x_k^{\lambda_k}\Big)^{\mu_k/\lambda_k}.$$

Согласно (2),

$$\prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{a_k \lambda_k}{\mu_k}\, x_k^{\lambda_k}\Big)^{(\mu_k/\lambda_k)/\theta} \leqslant \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \Big(\frac{a_k \lambda_k}{\mu_k}\, x_k^{\lambda_k}\Big) = \frac{A}{\theta}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\mu_k} \leqslant P\Big(\frac{A}{\theta}\Big)^{\theta}. \tag{9}$$

Неравенство (9) выполняется как равенство лишь тогда, когда

$$\frac{a_1 \lambda_1}{\mu_1}\, x_1^{\lambda_1} = \frac{a_2 \lambda_2}{\mu_2}\, x_2^{\lambda_2} = \cdots = \frac{a_n \lambda_n}{\mu_n}\, x_n^{\lambda_n} =: h\,.$$

Перепишем это условие в виде $a_k x_k^{\lambda_k} = h\, \mu_k/\lambda_k$, $k \in 1:n$. В силу ограничения задачи (7)

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^{\lambda_k} = h\,\theta\,,$$

так что $h = A/\theta$.

Приходим к требуемому заключению: наибольшее значение произведения $\prod_{k=1}^{n} x_k^{\mu_k}$ равно $P(A/\theta)^\theta$ и достигается на единственном плане (8).

Предложение доказано. $\square$

4°. С точки зрения экстремальных задач важно не только установить некоторое неравенство, но и выяснить, когда оно выполняется как равенство.

В этой связи сделаем одно замечание: известное неравенство для вещественных чисел

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

выполняется как равенство тогда и только тогда, когда все ненулевые x_k имеют одинаковый знак.

Действительно, обозначим $I = \{k \in 1:n \mid x_k \neq 0\}$ и допустим, что

$$\operatorname{sign} x_k = \operatorname{sign}\left(\sum_{k\in I} x_k\right) \qquad \text{при всех } k \in I.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \left(\sum_{k\in I} x_k\right) \operatorname{sign}\left(\sum_{k\in I} x_k\right) = \sum_{k\in I} x_k \operatorname{sign} x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,.$$

Наоборот, пусть

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{10}$$

Покажем, что все ненулевые x_k имеют одинаковый знак. В противном случае индексные множества $I_+ = \{k \in 1:n \mid x_k > 0\}$, $I_- = \{k \in 1:n \mid x_k < 0\}$ непусты и числа $B = \sum_{k\in I_+} x_k$, $C = -\sum_{k\in I_-} x_k$ положительны. Согласно (10),

$$|B - C| = B + C. \tag{11}$$

Поскольку $|B-C|$ равно $B-C$ или $C-B$, то из (11) следует, что либо $C = 0$, либо $B = 0$. Но это противоречит допущению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кречмар В. А. *Задачник по алгебре.* Изд. 3-е. М.: Физматгиз, 1959. С. 82–83.