ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ*

М. Н. Юркина
istomina@syktsu.ru

20 октября 2012 г.

Впервые о циклических фреймах на семинаре было рассказано в докладе В. Н. Малозёмова [1]. В настоящем докладе мы используем другой подход, предложенный в книге [2].

Напомним, что система ненулевых векторов

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m\} \tag{1}$$

пространства $\mathbb{R}^n$ при $m > n$ называется *фреймом Парсеваля*, если матрица Φ, составленная из столбцов $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m$, удовлетворяет условию

$$\Phi\Phi^T = I_n, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Умножив (2) справа на произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^n$, получим эквивалентное определение

$$x = \sum_{k=1}^{m} \langle x,\ \varphi_k\rangle \varphi_k. \tag{3}$$

Согласно [1], фрейм Парсеваля (1) будет *циклическим*, если

$$\langle \varphi_{k+1},\ \varphi_{j+1}\rangle = \langle \varphi_k,\ \varphi_j\rangle, \quad k,\ j \in 1:m, \tag{4}$$

где $\varphi_{m+1} = \varphi_1$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы фрейм Парсеваля (1) был циклическим, необходимо и достаточно, чтобы существовала ортогональная матрица P порядка n, такая, что $P^m = I_n$ и*

$$\varphi_{k+1} = P\varphi_k, \quad k \in 1:m-1. \tag{5}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доказательство. Необходимость. Матрицу P можно задать явно:

$$P = \Phi\, S\, \Phi^T, \tag{6}$$

где S — матрица перестановок порядка m вида

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для произвольного $j \in 1:m$ согласно (4) и (2) имеем

$$\begin{aligned} P\varphi_j &= \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_k,\, \varphi_j \rangle (\Phi S)_k = \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_k,\, \varphi_j \rangle\, \varphi_{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \langle \varphi_{k+1},\, \varphi_{j+1} \rangle\, \varphi_{k+1} + \langle \varphi_1,\, \varphi_{j+1} \rangle\, \varphi_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_{j+1},\, \varphi_k \rangle\, \varphi_k = \varphi_{j+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда, в частности, следует (5). Саму формулу (7) можно переписать в виде

$$P\Phi = \Phi S. \tag{8}$$

Разберёмся со свойствами матрицы P. Умножив (6) на Φ справа, получим $P\Phi = \Phi\, S\, \Phi^T \Phi$, что вместе с (8) приводит к равенству

$$\Phi\, S\, \Phi^T \Phi = \Phi S. \tag{9}$$

Отметим также очевидные соотношения

$$S\, S^T = I_m, \qquad S^m = I_m.$$

Согласно (9) и (2) имеем

$$P\, P^T = (\Phi\, S\, \Phi^T \Phi) S^T \Phi^T = \Phi (S\, S^T) \Phi^T = \Phi\, \Phi^T = I_n.$$

Установлена ортогональность матрицы P.

Остаётся проверить равенство $P^m = I_n$. Справедлива общая формула

$$P^\alpha = \Phi\, S^\alpha \Phi^T, \quad \alpha = 1,\ 2, \dots \tag{10}$$

Действительно, при $\alpha = 1$ эта формула совпадает с (6). Сделаем индукционный переход от α к $\alpha + 1$. В силу (9) имеем

$$P^{\alpha+1} = P\,P^{\alpha} = (\Phi\,S\,\Phi^T\Phi)S^{\alpha}\Phi^T = \Phi(S\,S^{\alpha})\Phi^T = \Phi\,S^{\alpha+1}\Phi^T,$$

что и требовалось доказать. При $\alpha = m$ из (10) следует, что

$$P^m = \Phi S^m \Phi^T = \Phi\,\Phi^T = I_n.$$

Достаточность. Согласно (5),

$$\varphi_{k+1} = P^k \varphi_1, \quad k \in 1 : m-1.$$

Формально положим $\varphi_{m+1} = P^m \varphi_1$. По условию $P^m = I_n$, поэтому $\varphi_{m+1} = \varphi_1$. Теперь при всех $k,\ j \in 1 : m$ в силу ортогональности матрицы P имеем

$$\langle \varphi_{k+1},\, \varphi_{j+1} \rangle = \langle P\varphi_k,\, P\varphi_j \rangle = \langle P^T P \varphi_k,\, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_k,\, \varphi_j \rangle,$$

что соответствует (4).

Теорема доказана. □

Замечание. В книге [2] данная теорема установлена в частном случае, для обобщённых гармонических фреймов (теорема 8.8). Для таких фреймов в [2] построена ортогональная матрица P, для которой наряду с равенством $P^m = I_n$ выполняется соотношение $P^{\alpha} \neq I_n$ при $\alpha \in 1 : m-1$. В случае фреймов Парсеваля последнее соотношение может, вообще говоря, не выполняться.

ПРИМЕР. В пространстве $\mathbb{R}^n$ при $m = 2n$ рассмотрим систему векторов

$$\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1,\ \ldots,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_n,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1,\ \ldots,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_n\}, \tag{11}$$

где e_k — орты в $\mathbb{R}^n$. Эта система образует фрейм Парсеваля. Действительно, положив

$$\varphi_k = \varphi_{k+n} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_k, \quad k \in 1 : n,$$

для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ получим

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x,\, e_k \rangle\, e_k = 2\sum_{k=1}^{n} \langle x,\, \tfrac{e_k}{\sqrt{2}} \rangle\, \tfrac{e_k}{\sqrt{2}} = \sum_{k=1}^{2n} \langle x,\, \varphi_k \rangle\, \varphi_k.$$

Покажем, что фрейм Парсеваля (11) является циклическим. В качестве матрицы P возьмём матрицу перестановок S указанного ранее вида, на этот раз имеющую порядок n. В силу свойства $P^n = I_n$ для системы векторов (11) справедлива формула (5). Матрица P — ортогональная и $P^m = P^{2n} = I_n$. Доказанная теорема гарантирует цикличность фрейма (11). Вместе с тем, соотношение $P^{\alpha} \neq I_n$ при всех $\alpha \in 1 : m-1$ не выполняется ($P^n = I_n$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Циклические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 21 января 2009 г. (http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121)

2. Han D., Kornelson K., Larson D., Weber E. *Frames for undergraduetes.* Providence, RI: AMS, 2007. 259 pp.