ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ И ОРТОПРОЕКТОРЫ*

М. С. Беспалов

bespalov@vlsu.ru

21 октября 2011 г.

Жёстким фреймам посвящён цикл избранных докладов данного семинара в 2006–2009 г., которые подготовили Малозёмов В. Н., Певный А. Б., Соловьева Н. А., Истомина М. Н. и Сабаев А. Н. В эти же годы в обиход вошёл термин "фрейм Парсеваля" для наиболее простого случая жёсткого фрейма. Любой жёсткий фрейм нормировкой (умножением всех элементов фрейма на одно число) переводится во фрейм Парсеваля. Поэтому свойства и принципы построения жёстких фреймов и их частных случаев (в виде системы типа Мерседес-Бенц) удобнее формулировать в терминах фреймов Парсеваля.

В докладе рассмотрим свойства фреймов Парсеваля в конечномерном евклидовом пространстве. Эти свойства с отдельными изменениями можно перенести в гильбертово пространство.

1°. Три эквивалентных способа определения жёсткого фрейма в $\mathbb{R}^n$ приведены в докладе [1]. Изучим общий случай фрейма Парсеваля, рассматривая в качестве H пространство $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Обозначим Λ одно из множеств $\{1, 2, \ldots, m\}$ или $\mathbb{N}$, чтобы учесть и вариант фрейма бесконечного объема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Фреймом Парсеваля в H* называется набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из H такой, что для любого $x \in H$ выполняется равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\Lambda} |\langle x, \varphi_k\rangle|^2. \tag{1}$$

В основном случае $\Lambda = \{1, 2, \ldots, m\}$ имеем фрейм Парсеваля *объёма* m. В книге [2] фрейм Парсеваля назван *ортоподобной системой.*

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Доклад подготовлен при поддержке РФФИ, проект 11-01-97512 р-центр-а.

ПРИМЕР 1. Следующий бесконечный набор векторов составляет фрейм Парсеваля в двумерном пространстве

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/4 \end{pmatrix},\ \varphi_4 = \frac{1}{2}\,\varphi_3, \dots, \varphi_k = \frac{1}{2}\,\varphi_{k-1}, \dots.$$

Действительно, для произвольного $x = \binom{a}{b}$ коэффициенты разложения равны

$$c_1 = -\frac{a}{2},\ c_2 = \frac{3}{4}\,a - \frac{b}{2},\ c_3 = \frac{3}{8}(a+2b),\ c_4 = \frac{1}{2}\,c_3, \dots, c_k = \frac{1}{2}\,c_{k-1}, \dots.$$

Вычислим сумму их квадратов:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16} - \frac{3}{4}ab + \frac{b^2}{4} + (a^2 + 4ab + 4b^2)\,\frac{9}{64}\big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\big) = a^2 + b^2 = |x|^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из H составляет фрейм Парсеваля в H тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ справедливо*

$$x = \sum_{k\in\Lambda} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k. \tag{2}$$

Доказательство для более общего случая гильбертова пространства приведено в книге [2, с. 74], а для $\mathbb{R}^n$ в [1], где также дано доказательство предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если набор векторов $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ линейно независим и составляет фрейм Парсеваля в H, то Φ — ортонормированный базис H.*

Доказательство. Линейная независимость гарантирует единственность представления (2): $x = \sum_{k\in\Lambda} c_k\varphi_k$. Подставляя в (2) по очереди все элементы фрейма Φ, проверяем ортонормированность. $\square$

Обозначим через: Φ матрицу со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ в случае $|\Lambda| = m$ или со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$ в случае $\Lambda = \mathbb{N}$; Φ^* сопряжённую к ней матрицу, которая получается применением транспонирования матрицы и комплексного сопряжения всех элементов; I_n единичную матрицу порядка n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из $\mathbb{R}^n$ составляет фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда*

$$\Phi\Phi^* = I_n. \tag{3}$$

Возможен случай, когда столбцы $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ из $\mathbb{R}^s$ лежат и составляют фрейм Парсеваля только в n-мерном подпространстве H ($n < s$). Тогда $\Phi\Phi^*$ есть матрица ортопроектора на это подпространство H (см. пример 5).

2°. Основным методом построения фреймов Парсеваля можно считать метод ортогонального проектирования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $\{f_k\}_{k\in\Lambda}$ — ортонормированный базис в евклидовом (конечномерном или бесконечномерном) пространстве H_1, а $P : H_1 \to H$ ортогональный проектор на его подпространство H, то система $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$, где $\varphi_k = Pf_k$, есть фрейм Парсеваля в H.*

Доказательство. Для любого $x \in H_1$ справедливо равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\Lambda} |\langle x, f_k\rangle|^2.$$

Если же взять $x \in H$, то по свойству ортогональности проектирования $f_k - \varphi_k \in H^\perp$ и

$$\langle x, f_k\rangle = \langle x, \varphi_k\rangle + \langle x, f_k - \varphi_k\rangle = \langle x, \varphi_k\rangle,$$

а равенство Парсеваля превращается в (1). □

В статье [3] следующее обратное утверждение сформулировано для жёсткого фрейма со ссылкой на теорему Наймарка [4, гл. IX]. Более общая формулировка принципа проектирования доказана в статье [5].

ТЕОРЕМА 1. *Для любого фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ в H существует объемлющее пространство $H_1 \supset H$ с ортонормированным базисом $\{f_k\}_{k\in\Lambda}$, который при ортогональном проектировании на H переходит в Φ.*

Доказательство этой теоремы в пространстве с базисом дано в [6], а аналогичного утверждения для базисов Рисса приведено в книге [2, с. 76].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Длины всех векторов фрейма Парсеваля находятся в пределах от* 0 *до* 1.

ПРИМЕР 2. В теореме 1 фразу *для любого фрейма Парсеваля* нельзя заменить (ср. с [3]) на фразу *для любого жёсткого фрейма*, что подтверждается известным примером системы Мерседес-Бенц [7, с. 100]:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как у любого (ненулевого), не являющегося собственным для ортопроектора, вектора при проектировании уменьшается его длина, то данные векторы не могут быть ортопроекцией ортонормированного базиса.

Данный жёсткий фрейм становится фреймом Парсеваля после нормировки в виде умножения всех элементов на $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3°. Формально ортонормированный базис является тоже фреймом Парсеваля. При добавлении нулевых элементов фрейм Парсеваля переходит во фрейм Парсеваля, но большего объема. Эти случаи считаем неинтересными и называем вырожденными фреймами Парсеваля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Вырожденным* назовём такой фрейм Парсеваля, который содержит векторы нулевой или единичной длины.

Любой *невырожденный фрейм Парсеваля* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) характеризуется тем, что $0 < |\varphi_k| < 1$ для всех k и фрейм избыточен: $m > n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Ко-рангом* фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве размерности n назовём величину $\mathrm{cr}(\Phi) = m - n$.

Поэтому, ортонормированный базис служит фреймом Парсеваля нулевого ко-ранга. Любой невырожденный фрейм Парсеваля имеет положительный ко-ранг. Ко-ранг равен бесконечности, если во фрейме Парсеваля счётное число векторов. Невырожденный фрейм Парсеваля называют избыточной системой и вместо термина "ко-ранг" часто употребляют [8] термин "избыточность".

Замечание 1.1. Обращаем внимание на то, что ко-ранг вычисляется не по отношению к размерности пространства, в котором заданы векторы, а по отношению к РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРОМ ДЕЙСТВУЕТ ФРЕЙМ.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Любой конечный набор векторов $\{\varphi_k\}$ составляет фрейм в линейной оболочке $\mathrm{span}\{\varphi_k\}$, но не в объемлющем пространстве.*

Это есть простой частный случай первой по порядку теоремы из книги [2], в которой говорится, что *система Рисса является базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки.* Приведём общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ евклидова пространства H_1 составляет *фрейм Парсеваля в* $H \subset H_1$, где в качестве H берём $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}}$, если для любого $x \in H$ выполняется условие (1) (или эквивалентное ему (2)).

В докладе в качестве H берём конечномерное пространство, поэтому необходимость переходить к замыканию линейной оболочки отпадает. Формально фрейм Парсеваля в H можно было бы трактовать как фрейм Парсеваля в любом подпространстве H, что влекло бы некорректность определения ко-ранга.

ПРИМЕР 3. Столбцы матрицы

$$\Phi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

образуют фрейм Парсеваля в двумерном подпространстве, ортогональном одномерному подпространству, образованному вектором $f = (1\ 1\ 1)^T$.

Более того, это и есть нормированный фрейм Мерседес-Бенц из примера 2.

4°. Метод проектирования просто реализуется при построении новых фреймов Парсеваля. Если из произвольной унитарной ($U^{-1} = U^*$) матрицы U удалим несколько строк, то столбцы оставшейся матрицы Φ составят фрейм Парсеваля. Столбцы удалённой матрицы Ψ тоже составляют фрейм Парсеваля, который называется [6] *дополнительным* к фрейму Φ. Отметим, что фрейм рассматриваем как упорядоченный набор элементов.

Применением принципа проектирования получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если фрейм Парсеваля невырожденный, то и его дополнительный фрейм Парсеваля тоже невырожденный.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Столбцы матриц Φ и Ψ составляют пару взаимно дополнительных фреймов Парсеваля объёма m в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{m-n}$ соответственно тогда и только тогда, когда*

$$\Phi\Phi^* = I_n, \quad \Psi\Psi^* = I_{m-n}, \quad \Phi\Psi^* = 0 \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Если Φ и Ψ дополнительные фреймы Парсеваля, то по определению блочная матрица $\binom{\Phi}{\Psi}$ унитарна. То есть

$$I_m = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \cdot (\Phi \quad \Psi)^* = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \cdot (\Phi^* \quad \Psi^*) = \begin{pmatrix} \Phi\Phi^* & \Phi\Psi^* \\ \Psi\Phi^* & \Psi\Psi^* \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает (5) и $\Psi\Phi^* = 0$.

Достаточность. Равенство $\Phi\Psi^* = 0$ влечёт $\Psi\Phi^* = 0$. Столбцы матриц Φ и Ψ являются фреймами Парсеваля согласно предложению 2. Аналогично проверяем унитарность блочной матрицы $\binom{\Phi}{\Psi}$. □

ПРИМЕР 4. Столбцы любой из двух матриц

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

образуют фрейм Парсеваля в трёхмерном пространстве (Φ_2 в $\mathbb{C}^3$). Дополнительный фрейм Парсеваля к каждому из этих фреймов состоит из четырёх одинаковых элементов $(1/2)$ одномерного пространства.

Элементы фрейма не обязаны быть векторами, заданными в координатах. Конечномерное пространство H может, например, возникнуть как подпространство ступенчатых функций в пространстве L^2. Но и в координатах возможно представление $\mathbf{H}$ в виде $\mathbb{R}^s$ с условием $s > m$ (см. пример 5). Отметим, что в примере 1 дополнительный фрейм Парсеваля действует в l^2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для невырожденного фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$ в $H \subset \mathbf{H}$ *дополнительным* называется такой невырожденный фрейм Парсеваля $\Psi = \{\psi_k\}_{k\in\Lambda}$ в некотором $H_1 \subset \mathbf{H}$, что $\Phi + \Psi = \{\varphi_k + \psi_k\}_{k\in\Lambda}$ есть ортонормированный базис в $H \oplus H_1 \subset \mathbf{H}$, где $H_1 \perp H$.

5°. Исчерпывающую характеристику о внутреннем устройстве фрейма Парсеваля дает *матрица Грама*. Матрицей Грама G набора векторов $\{\varphi_k\}$ служит [4, с. 25] матрица скалярных произведений $\langle\varphi_k, \varphi_l\rangle$. В координатном пространстве имеем

$$G = \Phi^* \cdot \Phi \tag{6}$$

На главной диагонали матрицы Грама квадраты длин векторов (норм элементов). Поэтому, если каждую строку и каждый столбец матрицы Грама поделим на длину соответствующего элемента, то получим матрицу косинусов углов между элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Фреймы Парсеваля с одинаковыми матрицами Грама назовём *изоморфными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Матрица Грама фрейма Парсеваля* ***идемпотентна*** *(то есть $G^2 = G$) и* ***эрмитова*** *(то есть $G^* = G$).*

Доказательство. Если столбцы Φ из $\mathbb{R}^n$, то по формуле (3) трактуем Id как I_n. Если же столбцы Φ из $\mathbb{R}^s$ $(s > n)$, то $\Phi\Phi^*$ (как вытекает из доказательства в [1]) тождественный оператор по отношению к столбцам Φ:

$$G^2 = \Phi^*\Phi \cdot \Phi^*\Phi = \Phi^* Id(\Phi) = \Phi^*\Phi = G.$$

По правилу сопряжения произведения $G^* = (\Phi^* \cdot \Phi)^* = \Phi^*\Phi = G$. □

СЛЕДСТВИЕ 3. *Столбцы матрицы Грама фрейма Парсеваля составляют фрейм Парсеваля изоморфный исходному.*

В (4) приведена матрица Грама нормированного фрейма Мерседес-Бенц.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. [4, с. 111] *Оператор с матрицей P является ортопроектором тогда и только тогда, когда он идемпотентный и эрмитов.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Матрица Грама G фрейма Парсеваля $\Phi = \{\varphi_k\}$ задает ортопроектор на $H = \mathrm{span}\{\varphi_k\}$.*

Матрица ортопроектора есть матрица Грама некого фрейма Парсеваля.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если Ψ есть дополнительный фрейм Парсеваля к невырожденному фрейму Парсеваля Φ на H объёма m с матрицей Грама G, то матрица Грама для Ψ есть ортопроектор $I_m - G$ на $H^\perp$, где $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^m$.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Для оператора с матрицей Грама G от фрейма Парсеваля: столбцы матриц Φ^* и G являются собственными векторами, отвечающими собственному числу 1, а столбцы матриц Ψ^* и $I_m - G$ являются собственными векторами, отвечающими собственному числу 0.*

Матрица Грама фрейма Парсеваля является неотрицательно определённой.

6°. В книге [9] приводится *разложение единицы* — разложение тождественного оператора на сумму одномерных ортопроекторов, что в матричной записи соответствует разложению единичной матрицы на сумму матриц одномерных ортопроекторов. Если в пространстве есть ортонормированный базис в виде столбцов $\{f_k\}_{k\in\Lambda}$, то одномерные ортопроекторы вычисляются через векторы базиса как произведение матриц (матрица-столбец на матрицу-строку):

$$I = \sum_{k\in\Lambda} P_k = \sum_{k\in\Lambda} f_k \cdot f_k^*.$$

Существует процедура разложения произвольного ортопроектора P на сумму одномерных. Одномерные проекторы потому называются ортогональными, что

$$P_k \cdot P_j = P_j \cdot P_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Евклидовой нормой* матрицы A размера $n \times m$ называется [10, с. 353]

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{ij}|^2}.$$

В других книгах для неё применяют названия *норма Фробениуса*, или *Гильберта-Шмидта*, или *Шура*.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого фрейма Парсеваля в H с матрицей Грама G выполнено (а если элементы фрейма представлены в координатном пространстве столбцами матрицы Φ, то верны и последние два равенства цепочки)*

$$\dim H = \operatorname{rank} G = \|G\|_E^2 = \operatorname{Tr} G = \operatorname{rank} \Phi = \|\Phi\|_E^2.$$

Если исходный фрейм невырожденный и конечного объёма m, а в столбцах матрцы Ψ указан его дополнительный фрейм Парсеваля в некотором H_1, то

$$\operatorname{cr}(\Phi) = \dim H_1 = \operatorname{rank}(I_m - G) = \|I_m - G\|_E^2 = \operatorname{Tr}(I_m - G) = \operatorname{rank} \Psi = \|\Psi\|_E^2.$$

Доказательство. Пусть $\dim H = n$. По следствию 4 имеем $\operatorname{Im} G = \dim H$. А образ оператора G равен рангу его матрицы. Произвольный ортопроектор раскладывается на сумму одномерных $G = \sum_{k=1}^n P_k$, след каждого из которых равен 1. Поэтому $\operatorname{Tr} G = n$. Очевидно, что $\|G\|_E^2 = \operatorname{Tr} GG^*$. По предложению 5 имеем $GG^* = G$.

Для матрицы Φ евклидову норму вычислим также, как для матрицы G: $\|\Phi\|_E^2 = \operatorname{Tr} \Phi^*\Phi$, где $\Phi^*\Phi = G$ согласно (6). Столбы матриц Φ и G изоморфные фреймы Парсеваля. Поэтому $\operatorname{rank} \Phi = \operatorname{rank} G$.

Чтобы повторить эти рассуждения для дополнительного фрейма Парсеваля, нужно на исходный фрейм наложить условие невырожденности и конечности объема. Тогда размерность пространства H_1, для которого Ψ суть фрейм Парсеваля, будет равна $m-n$, что служит ко-рангом исходного фрейма. Из разложения единицы для пространства $H \oplus H_1$ вытекает то, что матрица Грама (проектор на пространство H_1) для Ψ имеет вид $I_m - G$. $\square$

ПРИМЕР 5. Столбцы матрицы Φ составляют нормированный фрейм Мерседес-Бенц в двумерном подпространстве с матрицей Грама (4). В качестве Ψ можно взять матрицу из четырёх одинаковых столбцов $\frac{\sqrt{2}}{6}(-1\ 0\ 2\ 1)^T$.

$$\Phi = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ -2 & -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Малоземов, А. Б. Певный. *Системы Мерседес-Бенц и жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0228`)

2. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. *Теория всплесков.* М.: Физматлит, 2005.

3. Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова. *Замечание об описании фреймов общего вида* // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.

4. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* // М.: Наука, 1966.

5. Т. П. Лукашенко. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 12. С. 57–72.

6. М. Н. Истомина, В. В. Максименко, А. Б. Певный. *Дополнительные жесткие фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 1 апреля 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0401`)

7. И. Добеши. *Десять лекций по вейвлетам.* М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.

8. R. Balan, P. G. Casazza, C. Heil, Z. Landau. *Deficits and Excesses of Frames* // Adv. in Comp. Math. 2003. V. 18. P. 93–116.

9. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. *Линейная алгебра.* М.: Наука, 1984.

10. Р. Хорн, Ч. Джонсон. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.