НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ*

В. Н. Малозёмов Я. В. Петухова
malv@math.spbu.ru ya.petukhova@mail.ru

9 апреля 2011 г.

Мы продолжаем изучение свойств периодических кривых Безье, следуя [1].

1°. Пусть n — натуральное число и $N = 2n + 1$. Напомним определение ядра Валле-Пуссена

$$b_n(t) = \frac{1}{N}\left(C_{2n}^n\right)^{-1}\Big(2\cos\frac{t}{2}\Big)^{2n}.$$

Это неотрицательный чётный тригонометрический полином порядка n, обладающий следующими свойствами [1, 2]:

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\,b_n(t)\Big|_{t=\pm\pi} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots\ldots, 2n-1; \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j) \equiv 1. \tag{2}$$

Здесь и далее $t_j = \frac{2\pi j}{N}$. На рис. 1 изображены графики ядра Валле-Пуссена при $n = 2$ и $n = 8$.

Ядро Валле-Пуссена можно представить в экспоненциальной форме

$$b_n(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\,e^{ikt},$$

где $f_{k,n} = \left(C_{2n}^n\right)^{-1} C_{2n}^{n-k}$. Ясно, что $f_{0,n} = 1$ и $f_{-k,n} = f_{k,n}$, $k \in 1 : n$. При этом

$$f_{k,n} = \prod_{s=1}^{k}\frac{n-s+1}{n+s}, \qquad k \in 1 : n. \tag{3}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

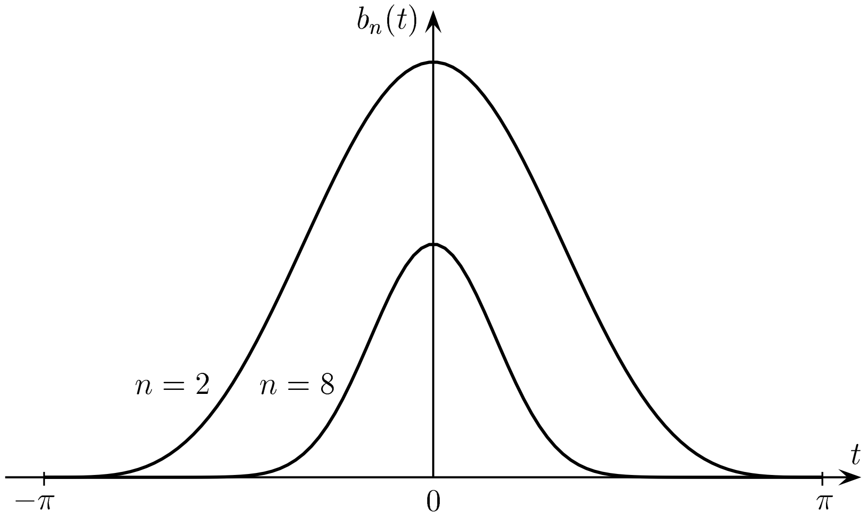


Рис. 1. Графики ядра Валле-Пуссена при $n = 2$ и $n = 8$

Продолжим коэффициенты $f_{k,n}$ с периодом N на все целые k. В силу периодичности и чётности

$$f_{k,n} = f_{N-k,n}\,, \qquad k \in n+1 : N-1. \tag{4}$$

Набор $\{f_{k,n}\}$ образует *спектр* ядра Валле-Пуссена. На рис. 2 изображён спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 6$.

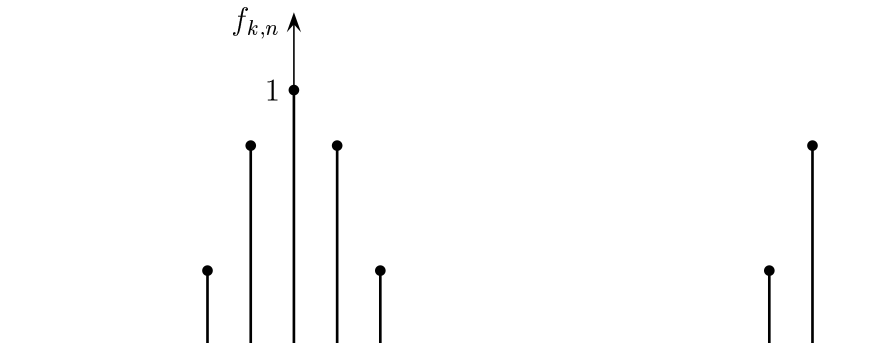


Рис. 2. Спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 6$

2°. Рассмотрим тригонометрический полином порядка n в форме Валле-Пуссена

$$p(t)=\sum_{j=0}^{N-1} p_j\, b_n(t-t_j). \tag{5}$$

Здесь p_j — комплексные коэффициенты. График $p(t)$ на комплексной плоскости называется *периодической кривой Безье*, а коэффициенты p_j — её *полюсами*.

Обозначим $\mathbf{p}=(p_0,p_1,\ldots,p_{N-1})$. Задание $p(t)$ в форме (5) эквивалентно заданию $p(t)$ в экспоненциальной форме

$$p(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt}, \tag{6}$$

где $c_k=f_{k,n}\big[\mathcal{F}_N(\mathbf{p})\big](k)$. Переход от представления (6) к представлению (5) осуществляется с помощью формулы обращения для ДПФ [2]

$$p_j=\frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{c_k}{f_{k,n}}\,\omega_N^{kj}\,, \qquad j\in 0:N-1. \tag{7}$$

3°. Зафиксируем $s\in 1:n$ и положим

$$c_k=\begin{cases}1 & \text{при } k=s,\\ 0 & \text{при } k\neq s.\end{cases}$$

В этом случае формула (6) примет вид

$$p(t)=\frac{1}{N}\,e^{ist}.$$

Вместе с тем, $p(t)$ допускает представление (5), в котором согласно (7)

$$p_j=\frac{1}{N}\,\frac{\omega_N^{sj}}{f_{s,n}}\,.$$

Получаем при $s\in 1:n$

$$e^{ist}=\frac{1}{f_{s,n}}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{sj}\, b_n(t-t_j). \tag{8}$$

Возьмем $s=1$. Согласно (3), $f_{1,n}=\frac{n}{n+1}$, поэтому

$$e^{it}=\frac{n+1}{n}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{j}\, b_n(t-t_j). \tag{9}$$

Формула (9) показывает, что периодической кривой Безье, построенной по полюсам $p_j = \frac{n+1}{n}\,\omega_N^j$, $j \in 0 : N-1$, является окружность на комплексной плоскости радиуса 1 с центром в начале координат. На рис. 3 изображены окружности Безье при $n = 1, 2, 3$.

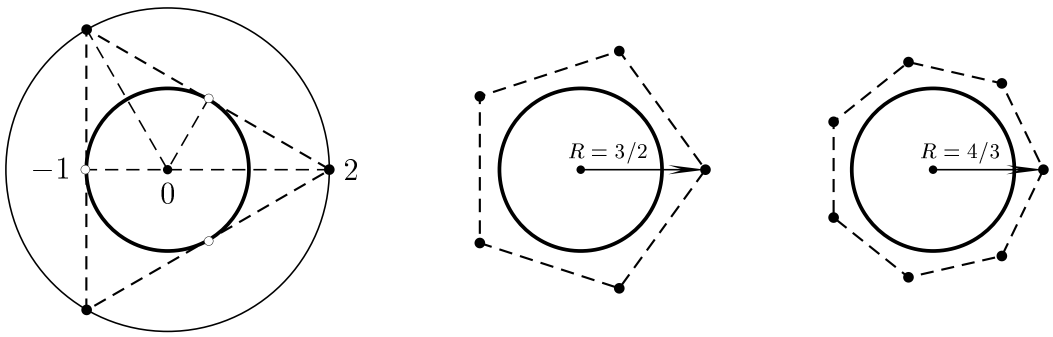


Рис. 3. Окружности Безье при $n = 1, 2, 3$

Отдельно рассмотрим случай $n = 1$, когда окружность Безье строится по трём полюсам $\widehat{p}_j = 2\,\omega_3^j$, $j \in 0 : 2$. Эти полюсы находятся на внешней окружности радиуса 2 с центром в начале координат и имеют вид

$$\widehat{p}_0 = (2,\, 0), \quad \widehat{p}_1 = (-1, \sqrt{3}), \quad \widehat{p}_2 = (-1, -\sqrt{3}).$$

По ним строится окружность Безье радиуса 1 с центром в начале координат. Из геометрических соображений ясно, что окружность Безье касается сторон треугольника с вершинами $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ в средних точках.

Положим в (8) $s = n = 2$. Учитывая, что $\frac{1}{f_{2,2}} = 6$, получаем

$$e^{i2t} = 6 \sum_{j=0}^{4} \omega_5^{2j}\, b_2(t - t_j).$$

Отсюда следует, что периодическая кривая Безье второго порядка, построенная по полюсам $p_j = 6\,\omega_5^{2j}$, $j \in 0 : 4$, при изменении t от 0 до 2π дважды пробегает на комплексной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат (см. рис. 4).

4°. Обратимся к задаче интерполяции с помощью периодических кривых Безье. Зафиксируем комплексные числа $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ и построим сначала тригонометрический полином вида (6), удовлетворяющий условиям

$$p(t_s) = a_s, \qquad s \in 0 : N-1. \tag{10}$$

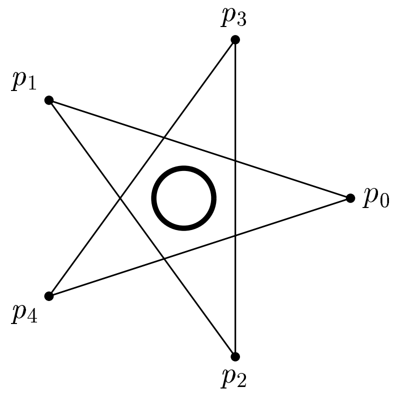


Рис. 4. Окружность Безье при $n = s = 2$

Подробная запись этих условий выглядит так:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \omega_N^{ks} \; = \; a_s, \qquad s \in 0 : N-1. \tag{11}$$

Решение системы (11) очевидно:

$$c_k = \big[\mathcal{F}_N(\mathbf{a})\big](k) =: A(k), \qquad k \in -n : n,$$

где $\mathbf{a} = (a_0, \, a_1, \ldots, \, a_{N-1})$. Действительно,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} a_l \, \omega_N^{-lk} \Big) \, \omega_N^{ks} = \sum_{l=0}^{N-1} a_l \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \omega_N^{k(s-l)} \right\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} a_l \, \delta_N \, (s-l) = a_s \, , \qquad s \in 0 : N-1.$$

Теперь перейдем к форме Валле-Пуссена для интерполяционного тригонометрического полинома. Согласно (7)

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{A(k)}{f_{k,n}} \, \omega_N^{kj} \, , \qquad j \in 0 : N-1.$$

В силу N-периодичности последнюю формулу можно переписать так:

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)}{f_{k,n}} \, \omega_N^{kj} \, , \qquad j \in 0 : N-1. \tag{12}$$

При этом нужно иметь в виду, что $f_{k,n}$ при $k \in n+1 : N-1$ вычисляются по формуле (4).

Подведем итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Решением интерполяционной задачи* (10) *является тригонометрический полином в форме Валле-Пуссена с полюсами* (12).

На рис. 5a изображена периодическая кривая Безье четвертого порядка, построенная по девяти полюсам $p_0, p_1, \ldots, p_8$, а на рис. 5b — другая кривая Безье, у которой предыдущие полюсы играют роль узлов интерполяции $a_0, a_1, \ldots, a_8$. На рис. 6 представлена соответствующая интерполяционная кривая Безье вместе с её полюсами.

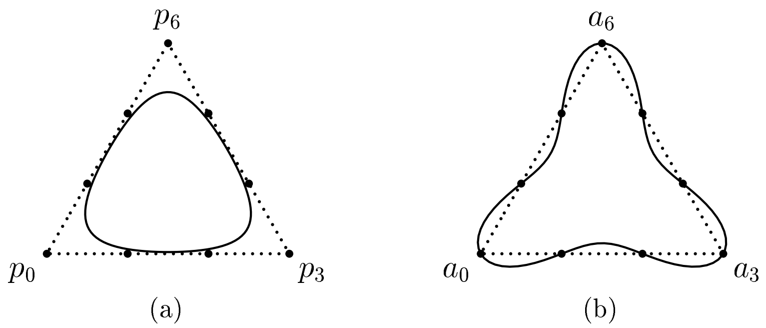


Рис. 5. Периодические кривые Безье четвертого порядка

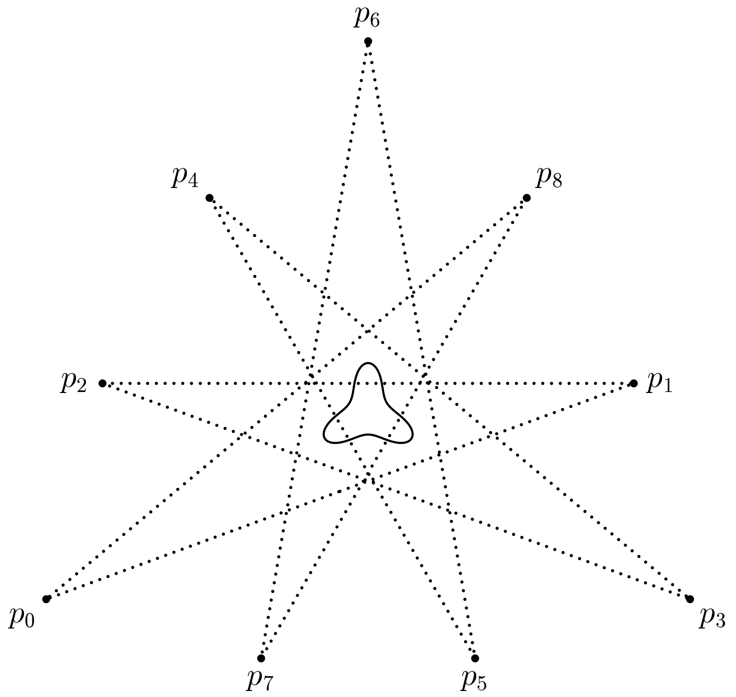


Рис. 6. Интерполяционная кривая Безье вместе с её полюсами

5°. В формуле (5) базисные функции $b_n(t-t_j)$ вещественны, поэтому вещественные и мнимые части $p(t)$ можно вычислять независимо. Это позволяет считать, что полюсы p_j — это векторы из $\mathbb{R}^2$. При изменении t от 0 до 2π вектор-функция $p(t)$ описывает некоторую замкнутую кривую на вещественной плоскости. Её по-прежнему будем называть *периодической кривой Безье.* В силу неотрицательности ядра Валле-Пуссена и свойства (2) периодическая кривая Безье содержится в выпуклой оболочке, натянутой на полюсы p_j, $j \in 0 : N-1$.

На рис. 7 показан вид периодической кривой Безье, построенной по трём полюсам, лежащим на одной прямой. Она дважды пробегает выделенный отрезок.

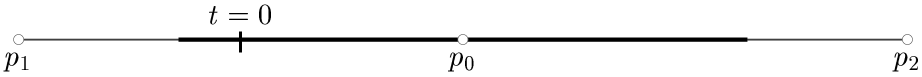


Рис. 7. Вырожденная кривая Безье

Рассмотрим случай, когда все полюсы, кроме одного, лежат на одной прямой. Пусть

$$p_j = \begin{pmatrix} \xi_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in 0 : N-1, \quad j \neq k;$$

$$p_k = \begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix}, \quad \eta_k > 0.$$

Тогда

$$p(t) = \sum_{j \neq k} \begin{pmatrix} \xi_j \\ 0 \end{pmatrix} b_n\bigl(t-t_j\bigr) + \begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix} b_n\bigl(t-t_k\bigr) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \, b_n(t-t_j) \\ \eta_k \, b_n(t-t_k) \end{pmatrix}.$$

Согласно (1) у кривой $p(t)$ при $t = t_k + \pi$ вторая координата равна нулю. Это значит, что $p(t)$ в указанной точке касается оси $\eta = 0$, на которой лежат остальные полюсы p_j. Более того, это касание в силу (1) имеет высокий порядок (см. рис. 8).

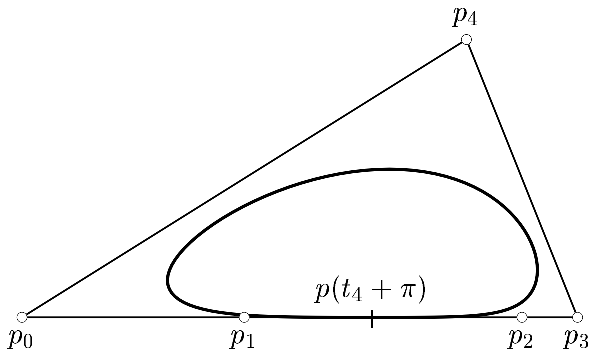


Рис. 8. Случай, когда все полюсы, кроме одного, лежат на одной прямой

6°. Следующий результат выглядит очень эффектно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть p_0, p_1, p_2 — произвольные полюсы на плоскости, не лежащие на одной прямой. Периодической кривой Безье, построенной по этим полюсам, будет эллипс, вписанный в треугольник с вершинами p_0, p_1, p_2 и касающийся его сторон в средних точках* (см. рис. 9).

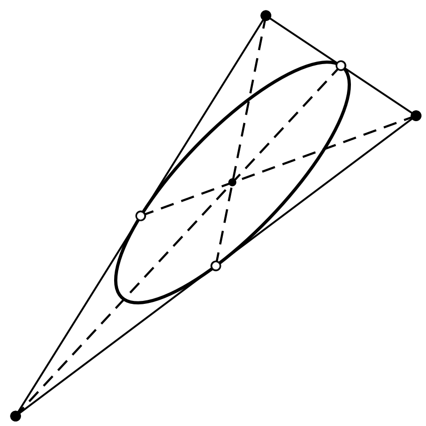


Рис. 9. Периодическая кривая Безье, построенная по трём полюсам

Для доказательства нам потребуются некоторые сведения об аффинных преобразованиях плоскости. Три точки $p_i = (\xi_i,\, \eta_i)^T$, $i \in 0 : 2$, называются *аффинно независимыми*, если матрица

$$\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

обратима.

ЛЕММА 1. *Точки p_0, p_1, p_2 не лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда они аффинно независимы.*

Действительно, условие леммы выполняется тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a\,\xi_0 + b\,\eta_0 + c = 0, \\ a\,\xi_1 + b\,\eta_1 + c = 0, \\ a\,\xi_2 + b\,\eta_2 + c = 0 \end{aligned}$$

относительно a, b, c имеет только нулевое решение. Это равносильно линейной независимости строк матрицы (13), что, в свою очередь, эквивалентно обратимости данной матрицы. □

Преобразование

$$y = Ax + b, \tag{14}$$

где $x = (\xi, \eta)^T$, $y = (u, v)^T$, $b = (b_1, b_2)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— обратимая матрица, называется *аффинным.*

ЛЕММА 2. *Существует единственное аффинное преобразование, переводящее три аффинно независимые точки $x_i = (\xi_i, \eta_i)^T$, $i \in 0:2$, в три аффинно независимые точки $y_i = (u_i, v_i)^T$, $i \in 0:2$.*

Доказательство. Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По условию леммы матрицы X и Y обратимы, поэтому существует единственная матрица $\widehat{A}$, такая, что $\widehat{A}\,X = Y$. Для матрицы $\widehat{A}$ можно указать явное представление $\widehat{A} = YX^{-1}$. Она обратима и $\widehat{A}^{-1} = XY^{-1}$.

Последняя строка матрицы $\widehat{A}$ равна произведению $(1,1,1)\,X^{-1}$, которое совпадает с последней строкой матрицы XX^{-1}, равной $(0,0,1)$. Таким образом, матрица $\widehat{A}$ имеет следующую структуру:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из обратимости матрицы $\widehat{A}$ следует обратимость матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица A и вектор $b = (b_1, b_2)^T$ определяют требуемое аффинное преобразование. $\square$

Возьмем точки x_0, x_1 на плоскости и рассмотрим прямую

$$x(t) = t\, x_1 + (1-t)\, x_0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

При аффинном преобразовании (14) точки x_0, x_1 переходят соответственно в точки $y_0 = Ax_0 + b$ и $y_1 = Ax_1 + b$, а прямая $x(t)$ — в прямую

$$y(t) = A\, x(t) + b = t\,\bigl(A\, x_1 + b\bigr) + (1-t)\,\bigl(A\, x_0 + b\bigr) = t\, y_1 + (1-t)\, y_0.$$

В частности, середина отрезка $[x_0, x_1]$ переходит в середину отрезка $[y_0, y_1]$.

ЛЕММА 3. *При аффинном преобразовании* (14) *единичная окружность* $S_1 = \Bigl\{x = (\xi, \eta)^T \;\Big|\; \xi^2 + \eta^2 = 1\Bigr\}$ *переходит в эллипс.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть линейное преобразование $y = A\, x$.

Обозначим $D = A^{-1}$,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Столбцы d_1, d_2 матрицы D отличны от нуля и линейно независимы. Отсюда, в частности, следует, что

$$\bigl|\bigl\langle d_1, d_2 \bigr\rangle\bigr| < \bigl\|d_1\bigr\| \cdot \bigl\|d_2\bigr\|. \tag{15}$$

На основании равенства $x = Dy$, заключаем, что образ единичной окружности S_1 состоит из точек $y = (u, v)^T$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(d_{11}\, u + d_{12}\, v)^2 + (d_{21}\, u + d_{22}\, v)^2 = 1.$$

Приведем это уравнение к виду

$$(d_{11}^2 + d_{21}^2)\, u^2 + 2\,(d_{11}\, d_{12} + d_{21}\, d_{22})\, u\, v + (d_{12}^2 + d_{22}^2)\, v^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать в терминах столбцов матрицы D:

$$\|d_1\|^2 u^2 + 2\,\bigl\langle d_1, d_2 \bigr\rangle\, u\, v + \|d_2\|\, v^2 - 1 = 0.$$

В данном случае неравенство (15) гарантирует, что кривая AS_1 является эллипсом (см. [3, часть 1, глава 7]). $\square$

7°. Переходим к доказательству предложения 2.

Как установлено в п. 3°, периодической кривой Безье, построенной по полюсам

$$\widehat{p}_0 = (2,0), \quad \widehat{p}_1 = (-1,\sqrt{3}), \quad \widehat{p}_2 = (-1,-\sqrt{3}),$$

является окружность $S_1 = \big\{x = (\xi,\eta)^T \mid \xi^2+\eta^2 = 1\big\}$, вписанная в треугольник $\widehat{\Delta}$ с вершинами $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ и касающаяся его сторон в средних точках. Очевидно, что полюсы $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ аффинно независимы. По лемме 2 существует единственное аффинное преобразование $y = Ax + b$, переводящее данные полюсы в полюсы p_0, p_1, p_2,

$$A\,\widehat{p}_j + b = p_j, \qquad j \in 0:2. \tag{16}$$

При этом треугольник $\widehat{\Delta}$ переходит в треугольник Δ с вершинами p_0, p_1, p_2 и середины сторон треугольника $\widehat{\Delta}$ переходят в середины сторон треугольника Δ.

Далее, кривая Безье, построенная по полюсам $\widehat{p}_0$, $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ при аффинном преобразовании переходит в кривую Безье, построенную по полюсам p_0, p_1, p_2. Действительно, согласно (2) и (16)

$$A\Big(\sum_{j=0}^{2}\widehat{p}_j\,b_1(t-t_j)\Big) + b = \sum_{j=0}^{2}\big(A\,\widehat{p}_j + b\big)\,b_1(t-t_j) = \sum_{j=0}^{2} p_j\,b_1(t-t_j). \tag{17}$$

Значит, окружность S_1 переходит в кривую Безье (17). Вместе с тем, по лемме 3 при аффинном преобразовании окружность S_1 переходит в эллипс. Как следствие получаем, что кривая Безье (17) является эллипсом.

Остается отметить, что кривая Безье (17) содержится в выпуклой оболочке своих полюсов p_0, p_1, p_2 и что середины сторон треугольника Δ лежат на этой кривой. Объединяя отмеченные факты, приходим к выводу: кривая Безье, построенная по полюсам p_0, p_1, p_2, есть эллипс, вписанный в треугольник с вершинами p_0, p_1, p_2 и касающийся его сторон в средних точках. $\square$

На рис. 10 иллюстрируется суть доказательства.

8°. Вернёмся к случаю, когда все полюсы являются комплексными числами. Каждому полюсу p_j сопоставим положительный вес w_j и рассмотрим 2π-периодическую дробно-рациональную функцию

$$R(t) = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} w_j\,p_j\,b_n(t-t_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} w_j\,b_n(t-t_j)}\,. \tag{18}$$

Обозначим

$$r_j(t) = \frac{w_j\,b_n(t-t_j)}{\sum_{k=0}^{N-1} w_k\,b_n(t-t_k)}\,, \qquad j \in 0:N-1.$$

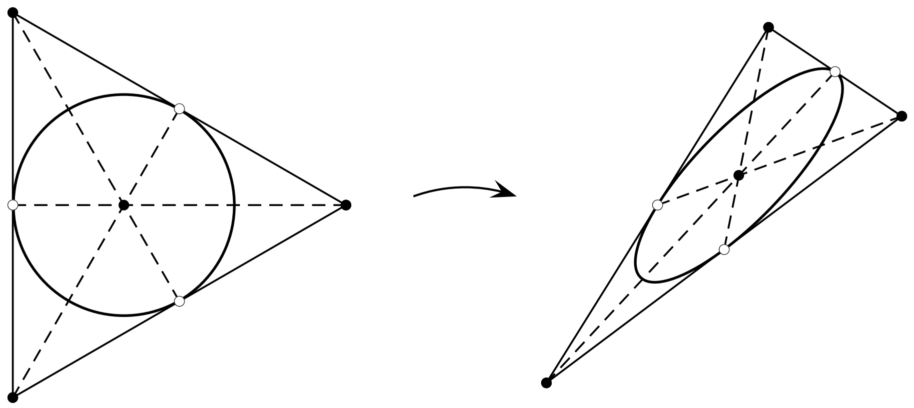


Рис. 10. Аффинное преобразование

Очевидно, что все функции $r_j(t)$ неотрицательны и $\sum_{j=0}^{N-1} r_j(t) \equiv 1$. Формулу (18) можно представить в виде

$$R(t) = \sum_{j=0}^{N-1} r_j(t)\, p_j.$$

Точка $R(t)$ при изменении t от 0 до 2π описывает на комплексной плоскости замкнутую кривую. Эту кривую назовем *проективной периодической кривой Безье*. В силу свойств функций $r_j(t)$ кривая $R(t)$ содержится в выпуклой оболочке своих полюсов p_j, $j \in 0 : N-1$.

На рис. 11 изображены проективные периодические кривые Безье при неизменных полюсах и различных весах.

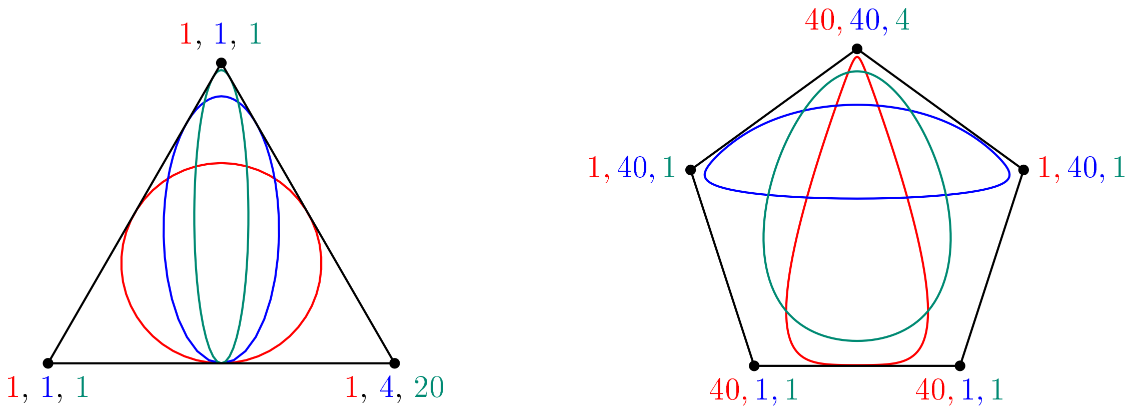


Рис. 11. Проективные периодические кривые Безье

9°. Рассмотрим задачу интерполяции, аналогичную (10):

$$R(t_s) = a_s, \qquad s \in 0 : N-1. \tag{19}$$

Веса w_j считаются фиксированными. Обозначим

$$q_j = w_j\, p_j, \qquad d_s = \sum_{j=0}^{N-1} w_j\, b_n(t_s - t_j).$$

Тогда задачу (19) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{j=0}^{N-1} q_j\, b_n(t_s - t_j) = d_s\, a_s, \qquad s \in 0 : N-1.$$

Решение последней задачи нам известно (формула (12)):

$$q_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj},$$

где

$$A_k = \sum_{s=0}^{N-1} d_s\, a_s\, \omega_N^{-kj}.$$

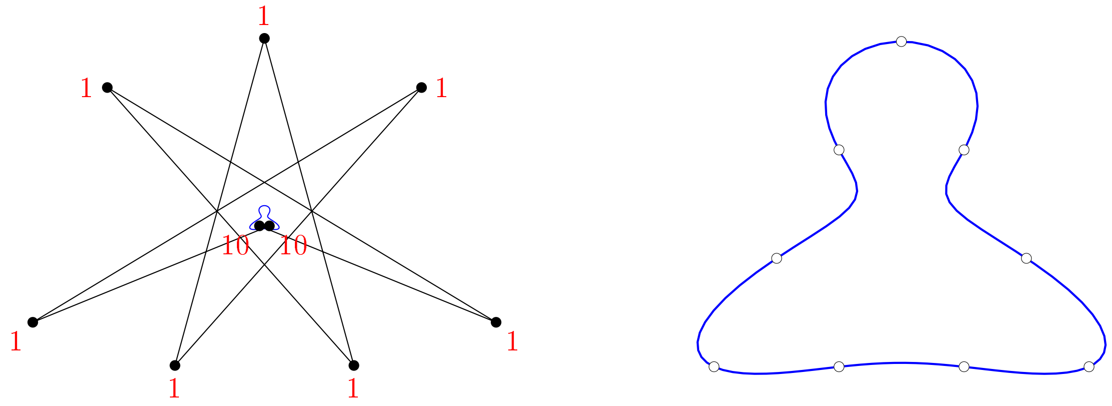
Учитывая определение q_j, получаем

$$p_j = \frac{1}{w_j\, N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj}, \qquad j \in 0 : N-1.$$

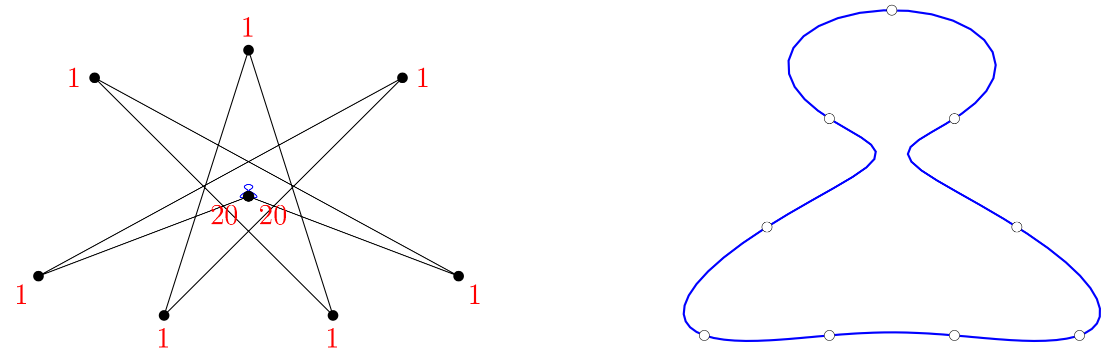
10°. Система уравнений (19) определяет параметирическое семейство интерполяционных кривых. Параметрами являются веса w_j, сопоставляемые неизвестным полюсам p_j. Когда все веса равны единице, проективная кривая Безье $R(t)$ в силу (2) совпадает с кривой Безье $p(t)$ вида (5). Этот случай — основной. По данной интерполяционной кривой Безье $p(t)$ путём варьирования весов можно построить интерполяционную кривую $R(t)$ с дополнительными свойствами.

В качестве примера возьмем интерполяционную кривую Безье, изображённую на рисунках 5b и 6. На рис. 12 – 14 представлены проективные кривые Безье, построенные по тем же интерполяционным условиям. На рис. 12 отличны от единицы два веса w_1 и w_2, на рис. 13 отличны от единицы три веса w_1, w_2, w_6. Наконец, на рис. 14 отличен от единицы один вес w_6.

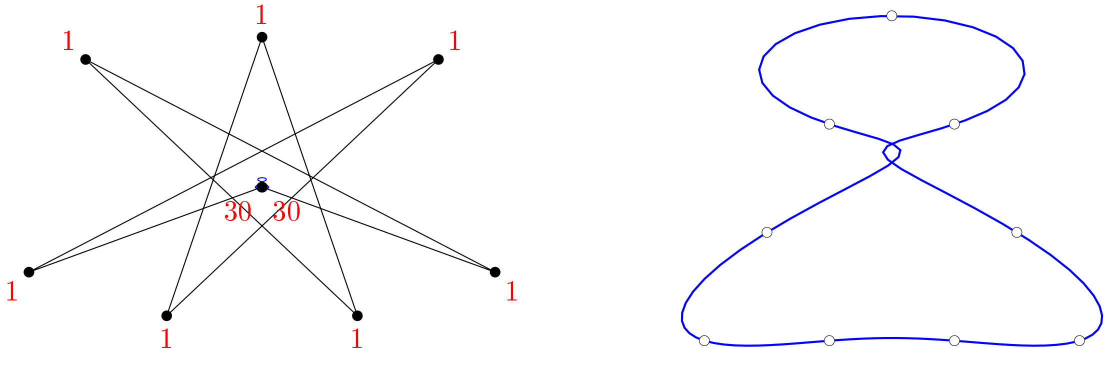
11°. Наряду с периодическими кривыми Безье в геометрическом моделировании можно использовать дискретные периодические сплайны [4, 5].



a) $w_1 = w_2 = 10$



b) $w_1 = w_2 = 20$



c) $w_1 = w_2 = 30$

Рис. 12. Итерполяция с помощью проективных периодических кривых Безье

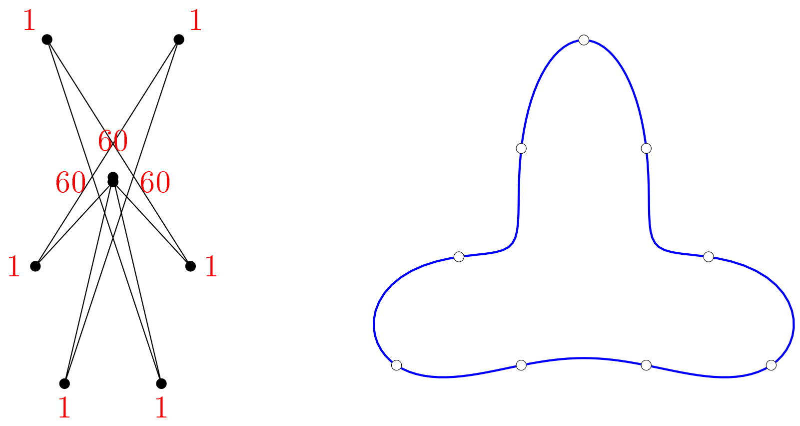


Рис. 13. Случай $w_1 = w_2 = w_6 = 60$

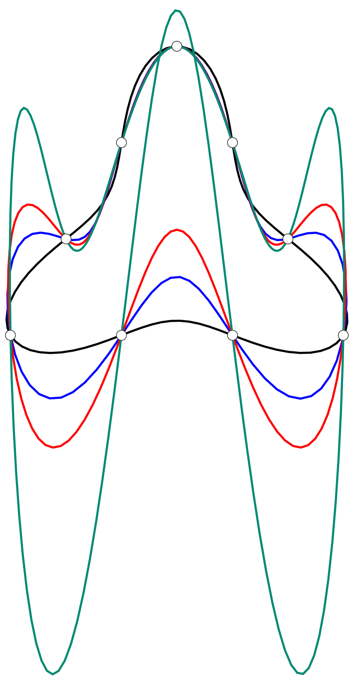


Рис. 14. Проективные кривые Безье, у которых $w_6 = 1, 15, 30, 100$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sánchez-Reyes J. *Periodic Bezier curves* // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. P. 989–1005.

2. Малозёмов В. Н., Петухова Я. В. *Периодические кривые Безье* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 апреля 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0428`).

3. Привалов И. И. *Аналитическая геометрия* // Изд. 38-е. СПб: Лань, 2010. 300 с.

4. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 19-–21.

5. Чашников Н. В. *Проективные дискретные периодические сплайны* // Семинар «DHA&CAGD». Избранные доклады. 19 февраля 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#0219`).