ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ БЕЗЬЕ*

В. Н. Малозёмов Я. В. Петухова
malv@math.spbu.ru ya.petukhova@mail.ru

28 апреля 2010 г.

Доклад представляет собой вариации на темы из статьи [1].

1°. Теория кривых Безье основана на свойствах алгебраических полиномов в форме Бернштейна [2]. В теории периодических кривых Безье аналогичную роль играют тригонометрические полиномы в форме Валле-Пуссена. Напомним определение таких полиномов.

Пусть n — натуральное число. Выражение

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1} \left(C_{2n}^n\right)^{-1} \Bigl(2\cos\frac{t}{2}\Bigr)^{2n} \tag{1}$$

называется *ядром Валле-Пуссена* порядка n [3, с. 26–35].

По формуле Эйлера

$$2\cos\frac{t}{2} = e^{it/2} + e^{-it/2},$$

так что

$$\Bigl(2\cos\frac{t}{2}\Bigr)^{2n} = \sum_{\alpha=0}^{2n} C_{2n}^{\alpha}\, e^{(it/2)\,(2n-\alpha)}\, e^{-(it/2)\,\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{2n} C_{2n}^{\alpha}\, e^{it\,(n-\alpha)} = \sum_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n-k}\, e^{ikt}.$$

Для ядра $b_n(t)$ получаем представление

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt}, \qquad f_{k,n} = \left(C_{2n}^n\right)^{-1} C_{2n}^{n-k}. \tag{2}$$

Отметим, что $f_{0,n} = 1$. Вектор коэффициентов $\mathbf{f}_n = (f_{k,n})_{k=-n}^{n}$ называется *спектром* ядра $b_n(t)$. На рис. 1 представлен спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 16$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

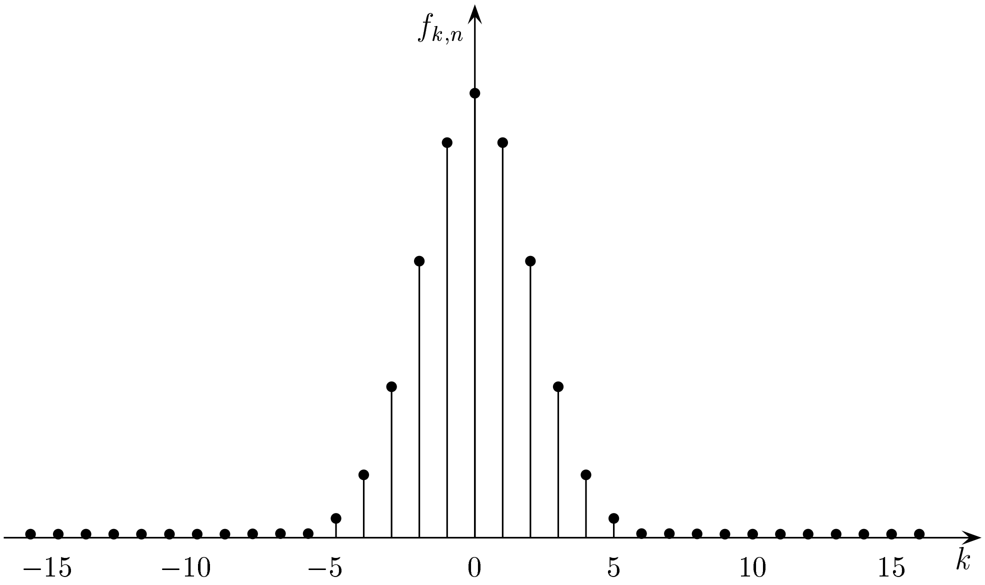

Рис. 1. Спектр ядра Валле-Пуссена при $n = 16$

Учитывая, что $f_{-k,n} = f_{k,n}$, формулу (2) можно переписать в виде

$$b_n(t) = \frac{1}{2n+1}\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{n} f_{k,n}\cos(kt)\Big). \tag{3}$$

В свою очередь при $k \in 1:n$

$$f_{k,n} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} = \frac{(n-k+1)\cdots n}{(n+1)\cdots(n+k)} = \prod_{s=1}^{k}\frac{n-s+1}{n+s}\,.$$

На основании (1)–(3) заключаем, что ядро Валле-Пуссена $b_n(t)$ является неотрицательным чётным тригонометрическим полиномом порядка n с положительными коэффициентами.

2°. Введём узлы $t_j = 2\pi j/N$, где $N = 2n+1$.

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j) \equiv 1. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Согласно (2) имеем

$$b_n(t - t_j) = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\,e^{ik(t-t_j)} = \frac{1}{N}\sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\,\omega_N^{-kj}\,e^{ikt}. \tag{5}$$

Значит,

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_n(t-t_j) = \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{-kj} \right\} = \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt}\, \delta_N(k) = f_{0,n} = 1,$$

что и требовалось установить. □

3°. Тригонометрический полином порядка n в форме Валле-Пуссена определяется следующим образом:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j\, b_n(t-t_j). \tag{6}$$

Здесь p_j — комплексные коэффициенты, которые называются также *полюсами*. Через $\mathbf{p} = (p_j)_{j=0}^{N-1}$ обозначим вектор коэффициентов.

Найдем спектр полинома $p(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеет место представление*

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt}, \tag{7}$$

где

$$c_k = f_{k,n} \big[\mathcal{F}_N(\mathbf{p})\big](k). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно (6) и (5)

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, \omega_N^{-kj}\, e^{ikt} = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n}\, e^{ikt} \sum_{j=0}^{N-1} p_j\, \omega_N^{-kj}.$$

Это соответствует формулам (7) и (8). □

Формула (8) позволяет перейти от представления (6) полинома $p(t)$ к представлению (7). Обратный переход связан с формулой обращения для дискретного преобразования Фурье:

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{c_k}{f_{k,n}}\, \omega_N^{kj}, \qquad j \in 0 : N-1. \tag{9}$$

Зафиксируем $s \in -n : n$ и рассмотрим конкретный спектр: $c_s = 1$ и $c_k = 0$ при $k \neq s$. Согласно (9) такой спектр порождает полюсы

$$p_j = \frac{1}{N} \frac{\omega_N^{sj}}{f_{s,n}}, \qquad j \in 0 : N-1.$$

На основании (7) и (6) приходим к соотношению

$$e^{ist} = \frac{1}{f_{s,n}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{sj}\, b_n(t - t_j), \qquad s \in -n : n.$$

Это соотношение, в частности, показывает, что любой тригонометрический полином порядка не выше n можно представить в форме Валле-Пуссена.

4°. Когда t изменяется от 0 до 2π, точка $p(t)$ вида (6) описывает замкнутую кривую на комплексной плоскости. Эта кривая называется *периодической кривой Безье порядка* n.

Перепишем формулу (6) так:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{N-1} b_n(t - t_j)\, p_j.$$

При фиксированном t числа $b_n(t - t_j)$ неотрицательны и согласно (4) в сумме равны единице. Это значит, что точка $p(t)$ является выпуклой комбинацией полюсов. Отсюда следует замечательный факт: *вся периодическая кривая Безье лежит в выпуклой оболочке своих полюсов.*

На рис. 2 приведен пример периодической кривой Безье второго порядка.

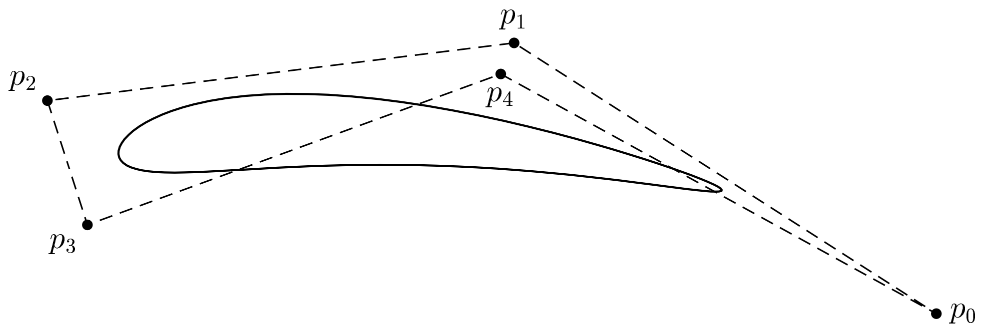

Рис. 2. Периодическая кривая Безье второго порядка

5°. Рассмотрим вопрос о повышении порядка периодической кривой Безье. Возьмем натуральное число $\hat{n} > n$ и обозначим $\widehat{N} = 2\hat{n} + 1$, $\hat{t}_j = 2\pi j/\widehat{N}$. Попытаемся представить полином $p(t)$ порядка n в виде полинома порядка $\hat{n}$. Запишем

$$p(t) = \sum_{j=0}^{\widehat{N}-1} \hat{p}_j\, b_{\hat{n}}(t - \hat{t}_j). \tag{10}$$

Согласно предложению 1

$$\sum_{j=0}^{\widehat{N}-1} \hat{p}_j \, b_{\hat{n}}(t - \hat{t}_j) = \frac{1}{\widehat{N}} \sum_{k=-\hat{n}}^{\hat{n}} \hat{c}_k \, e^{ikt}, \tag{11}$$

где $\hat{c}_k = f_{k,\hat{n}} \left[\mathcal{F}_{\widehat{N}}(\hat{\mathbf{p}})\right](k)$. Положим

$$\hat{c}_k = \begin{cases} (\widehat{N}/N) \, c_k & \text{при } k \in -n : n, \\ \quad 0 & \text{при } |k| \in n+1 : \hat{n}. \end{cases}$$

Тогда правая часть (11) в силу (7) будет равна $p(t)$. С помощью формул (9) и (8) по спектру $(\hat{c}_k)_{k=-\hat{n}}^{\hat{n}}$ восстановим полюсы $(\hat{p}_j)_{j=0}^{\widehat{N}-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{c_k}{f_{k,\hat{n}}} \, \omega_{\widehat{N}}^{kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \, \omega_{\widehat{N}}^{kj} \sum_{s=0}^{N-1} p_s \, \omega_N^{-ks} = \\ = \sum_{s=0}^{N-1} p_s \left(\frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \, \frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj}}{\omega_N^{ks}} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Если ввести матрицу A порядка $\widehat{N} \times N$ с элементами

$$A_{j,s} = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \, \frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj}}{\omega_N^{ks}}, \qquad j \in 0 : \widehat{N}-1, \quad s \in 0 : N-1,$$

то формулу (12) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{p}} = A \, \mathbf{p}. \tag{13}$$

Подведем итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Тригонометрический полином* $p(t)$, *определяемый формулой* (6), *при любом* $\hat{n} > n$ *допускает представление* (10), *в котором вектор коэффициентов* $\hat{\mathbf{p}}$ *пересчитывается по формуле* (13).

6°. Теперь покажем, что множество полюсов $(\hat{p}_j)_{j=0}^{\widehat{N}-1}$ при $\hat{n} \to \infty$ стремится к графику полинома $p(t)$. Зафиксируем $t \in [0, 2\pi)$ и положим $j_{\hat{n}} = \lfloor \frac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \rfloor$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\hat{n} \to \infty} \hat{p}_{j_{\hat{n}}} = p(t).$$

Доказательство. В силу (12) достаточно проверить, что при $s \in 0 : N-1$

$$\lim_{\hat{n}\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{f_{k,n}}{f_{k,\hat{n}}} \frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}}}{\omega_N^{ks}} = b_n(t - t_s).$$

Согласно (5) это равносильно проверке предельных соотношений

$$\lim_{\hat{n}\to\infty} \frac{\omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}}}{f_{k,\hat{n}}} = e^{ikt}, \qquad k \in -n : n.$$

Имеем

$$\omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}} = \exp\bigl(\tfrac{2\pi i}{\widehat{N}}\, k \left\lfloor \tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \right\rfloor\bigr). \tag{14}$$

По определению целой части числа

$$\tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \leqslant \left\lfloor \tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} \right\rfloor < \tfrac{\widehat{N}\, t}{2\pi} + 1,$$

так что

$$t \leqslant \tfrac{2\pi}{\widehat{N}} \left\lfloor \tfrac{\widehat{N} t}{2\pi} \right\rfloor < t + \tfrac{2\pi}{\widehat{N}}\,.$$

Отсюда и из (14) следует, что при $k \in -n : n$

$$\lim_{\hat{n}\to\infty} \omega_{\widehat{N}}^{kj_{\hat{n}}} = e^{ikt}.$$

Остается отметить, сославшись на последнюю формулу из п. 1°, что $f_{k,\widehat{N}} \to 1$ при $\hat{n} \to \infty$ и тех же k. Предложение доказано. □

На рис. 3 иллюстрируется процедура повышения порядка периодической кривой Безье, изображенной на рис. 2.

7°. Для построения периодической кривой Безье нужно вычислить значения полинома $p(t)$ вида (6) на мелкой сетке $\tau_s = 2\pi s/M$, $s \in 0 : M-1$, где $M > N$. Согласно (7) имеем

$$p(\tau_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \omega_M^{ks} = \frac{1}{N} \Bigl(\sum_{k=0}^{n} c_k\, \omega_M^{ks} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k\, \omega_M^{(k+M)\, s} \Bigr) =$$

$$= \frac{1}{N} \Bigl(\sum_{k=0}^{n} c_k\, \omega_M^{ks} + \sum_{k=M-n}^{M-1} c_{k-M}\, \omega_M^{ks} \Bigr).$$

Положим

$$d_k = \begin{cases} (M/N)\, c_k & \text{при } k \in 0 : n, \\ \quad 0 & \text{при } k \in n+1 : M-n-1, \\ (M/N)\, c_{k-M} & \text{при } k \in M-n : M-1. \end{cases}$$

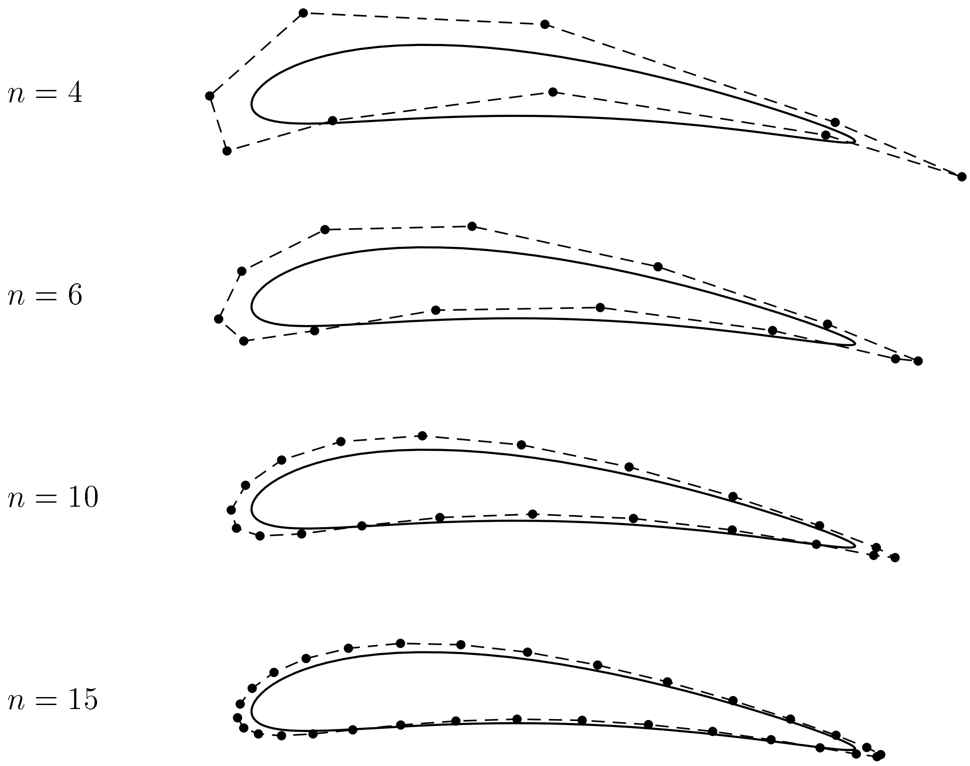

Рис. 3. Повышение порядка периодической кривой Безье

Тогда

$$p(\tau_s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} d_k \, \omega_N^{ks}, \qquad s \in 0 : M-1.$$

Это значит, что $p(\tau_s)$ суть значения обратного преобразования Фурье от спектра $\mathbf{d} = (d_k)_{k=0}^{M-1}$.

Обозначим

$$h_k = \big[\mathcal{F}_N(\mathbf{p})\big](k), \qquad k \in 0 : N-1.$$

Отметим, что в силу (8), четности $f_{k,n}$ по k и N-периодичности h_k, при $k \in$ $\in M-n : M-1$ справедлива формула

$$c_{k-M} = f_{M-k,n} \, h_{k-M+N}.$$

Для спектра $\mathbf{d}$ получаем представление

$$d_k = \begin{cases} (M/N)\, f_{k,n}\, h_k & \text{при } k \in 0 : n, \\ \quad 0 & \text{при } k \in n+1 : M-n-1, \\ (M/N)\, f_{M-k,n} h_{k-M+N} & \text{при } k \in M-n : M-1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sánchez-Reyes J. *Periodic Bezier curves* // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. P. 989-1005.

2. Григорьев М. И., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962-1971.

3. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций.* М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.