ФАКТОРИЗАЦИЯ ПОЛИФАЗНЫХ МАТРИЦ*

В. Н. Малозёмов Н. А. Соловьёва
malv@math.spbu.ru vinyo@mail.ru

31 октября 2009 г.

В докладе использованы материалы из обзорной статьи [1].

1°. Возьмём полином Лорана

$$h(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k\, z^{-k}.$$

Имеем

$$\frac{h(z)+h(-z)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n} a_k \bigl[1+(-1)^k\bigr] z^{-k}.$$

Положим $m_0 = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1$, $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,

$$h_0(z) = \sum_{k=m_0}^{n_0} a_{2k}\, z^{-k}.$$

Тогда

$$\frac{h(z)+h(-z)}{2} = h_0(z^2). \tag{1}$$

Далее

$$\frac{h(z)-h(-z)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n} a_k \bigl[1-(-1)^k\bigr] z^{-k}.$$

Положим $m_1 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $n_1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$,

$$h_1(z) = \sum_{k=m_1}^{n_1} a_{2k+1}\, z^{-k}.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Тогда

$$\frac{h(z)-h(-z)}{2} = z^{-1}\,h_1(z^2). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует *полифазное представление* полинома Лорана

$$h(z) = h_0(z^2) + z^{-1}\,h_1(z^2).$$

Возьмём ещё один полином Лорана $g(z)$ и запишем для него полифазное представление

$$g(z) = g_0(z^2) + z^{-1}\,g_1(z^2).$$

Сопоставим паре полиномов Лорана (h, g) *полифазную матрицу*

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_0(z) & g_0(z) \\ h_1(z) & g_1(z) \end{bmatrix}.$$

Если определитель полифазной матрицы тождественно равен единице, то соответствующие полиномы Лорана h, g называются *дополнительными*.

В дальнейшем нас будут интересовать только дополнительные пары полиномов Лорана.

2°. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* (h, g) *и* (h, g^0) *— дополнительные пары полиномов Лорана и* $P(z)$, $P^0(z)$ *— соответствующие полифазные матрицы. Тогда*

$$P(z) = P^0(z)\begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $s(z) = g_0(z)\,g_1^0(z) - g_1(z)\,g_0^0(z)$.

Доказательство. Правую часть (3) обозначим через $R(z)$. Имеем

$$R = \begin{bmatrix} h_0 & g_0^0 \\ h_1 & g_0^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & g_0\,g_1^0 - g_1\,g_0^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_0(g_0\,g_1^0 - g_1\,g_0^0) + g_0^0 \\ h_1 & h_1(g_0\,g_1^0 - g_1\,g_0^0) + g_1^0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} h_0 & g_0^0(1 - h_0\,g_1) + g_0\,h_0\,g_1^0 \\ h_1 & g_1^0(1 + h_1\,g_0) - g_1\,h_1\,g_0^0 \end{bmatrix}.$$

По условию $\det P(z) \equiv 1$, $\det P^0(z) \equiv 1$. Это значит, что

$$\begin{aligned} h_0\,g_1 - h_1\,g_0 &\equiv 1, \\ h_0\,g_1^0 - h_1\,g_0^0 &\equiv 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно,

$$R = \begin{bmatrix} h_0 & -g_0^0\,h_1\,g_0 + g_0(1 + h_1\,g_0^0) \\ h_1 & g_1^0\,h_0\,g_1 + g_1(1 - h_0\,g_1^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & g_0 \\ h_1 & g_1 \end{bmatrix} = P.$$

Предложение доказано. □

3°. Обратимся к задаче факторизации полифазной матрицы $P(z)$ дополнительной пары (h,g) полиномов Лорана. Как известно [2], справедлива формула

$$\begin{bmatrix} h_0(z) \\ h_1(z) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где n — число шагов в алгоритме Евклида нахождения наибольшего общего делителя полиномов $h_0(z)$ и $h_1(z)$, $d(z) = \text{НОД}(h_0(z), h_1(z))$ и $q_1(z), \dots, q_n(z)$ — последовательные неполные частные в алгоритме Евклида ($q_n(z)$ — полное частное). В данном случае согласно (4) единица делится на $d(z)$. Это возможно только тогда, когда степень $d(z)$ равна нулю, то есть когда $d(z) = Cz^{-p}$, где $C \neq 0$.

Введём полиномы $g_0^0(z)$, $g_1^0(z)$ с помощью формулы

$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Полифазная матрица пары полиномов Лорана (h, g^0), где

$$g^0(z) = g_0^0(z^2) + z^{-1} g_1^0(z^2),$$

имеет вид

$$P^0(z) = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\det P^0(z) \equiv 1$, поэтому пара (h, g^0) является дополнительной. В силу предложения 1

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $s(z) = g_0(z)\, g_1^0(z) - g_1(z)\, g_0^0(z)$. Значит,

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n\, d^2(z)\, s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix},$$

приходим к окончательному результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо разложение*

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} q_k(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n\, d^2(z)\, s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(z) & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{d(z)} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

4°. Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $h(z)=z^2+z+3+z^{-1}+z^{-2}$, $g(z)=-z^2-z-2$. Полифазная матрица пары (h,g) имеет вид

$$P(z)=\begin{bmatrix} z+3+z^{-1} & -z-2 \\ z+1 & -z \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что пара (h,g) — дополнительная.

Найдём наибольший общий делитель полиномов $z+3+z^{-1}$ и $z+1$. Для этого воспользуемся алгоритмом Евклида (см. [2]):

$$z+3+z^{-1}=(z+1)(1+2z^{-1})-z^{-1},$$
$$z+1=-z^{-1}(-z^2-z).$$

Имеем $n=2$, $q_1(z)=1+2z^{-1}$, $q_2(z)=-z^2-z$, $d(z)=-z^{-1}$. Вычислим полиномы $g_0^0(z)$ и $g_1^0(z)$. Согласно (5)

$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z^2-z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -z-2 \\ -z \end{bmatrix}.$$

Ясно, что $s(z)\equiv 0$. На основании (6) получаем

$$P(z)=\begin{bmatrix} 1+2z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z^2-z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z^{-1} & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix}.$$

В [2] отмечалось, что наибольший общий делитель двух полиномов Лорана определяется, вообще говоря, не единственным образом, поэтому и разложение (6) может быть не единственным. В данном примере возможен другой вариант развития событий:

$$z+3+z^{-1}=(z+1)(1+z^{-1})+1,$$
$$z+1=1\cdot(z+1);$$
$$n=2,\quad q_1(z)=1+z^{-1},\quad q_2(z)=z+1,\quad d(z)\equiv 1;$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0(z) \\ g_1^0(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$s(z)=-z-2+z(1+z^{-1})=-1;$$
$$P(z)=\begin{bmatrix} 1+z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Ещё один вариант:

$$z+3+z^{-1}=(z+1)(2+z^{-1})-z,$$
$$z+1=-z(-1-z^{-1});$$
$$n=2,\quad q_1(z)=2+z^{-1},\quad q_2(z)=-1-z^{-1},\quad d(z)=-z;$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0(z)\\ g_1^0(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+z^{-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1-z^{-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -z^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2z^{-1}-z^{-2}\\ -z^{-1}\end{bmatrix},$$
$$s(z)=(z+2)z^{-1}-z(2z^{-1}+z^{-2})=-1+z^{-1};$$
$$P(z)=\begin{bmatrix}2+z^{-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1-z^{-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -z^2+z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-z & 0\\ 0 & -z^{-1}\end{bmatrix}.$$

Последнее разложение получилось очень громоздким. Однако его можно упростить, если в алгоритме Евклида формально сделать ещё один шаг:

$$z+3+z^{-1}=(z+1)(2+z^{-1})-z,$$
$$z+1=-z(-1)+1,$$
$$-z=1\cdot(-z);$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0(z)\\ g_1^0(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+z^{-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-z & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+z^{-1}\\ 1\end{bmatrix},$$
$$s(z)=-(z+2)+z(1+z^{-1})=-1;$$
$$P(z)=\begin{bmatrix}2+z^{-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-z & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{8}$$

ПРИМЕР 2. Пусть $h(z)=\cos\alpha+\sin\alpha\, z^{-1}$, $g(z)=-\sin\alpha+\cos\alpha\, z^{-1}$, где $\sin\alpha\neq 0$. Запишем полифазную матрицу

$$P=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что пара (h,g) — дополнительная.

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\cos\alpha=\sin\alpha(\operatorname{ctg}\alpha).$$

Здесь $n=1$, $q_1=\operatorname{ctg}\alpha$, $d=\sin\alpha$. Далее имеем

$$\begin{bmatrix} g_0^0\\ g_1^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{ctg}\alpha & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{\sin\alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sin\alpha}\\ 0\end{bmatrix},$$
$$s=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приходим к разложению

$$P = \begin{bmatrix} \operatorname{ctg}\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin\alpha} \end{bmatrix}.$$

Другой вариант факторизации основан на более формальном подходе к алгоритму Евклида:

$$\cos\alpha = \sin\alpha\,\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} + 1,$$
$$\sin\alpha = 1\cdot(\sin\alpha);$$
$$\begin{bmatrix} g_0^0 \\ g_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\alpha-1)/\sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\alpha-1)/\sin\alpha \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$s = -\sin\alpha - \cos\alpha\,\frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha};$$
$$P = \begin{bmatrix} (\cos\alpha-1)/\sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (\cos\alpha-1)/\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что произведение двух матриц второго порядка не изменится, если поменять местами столбцы в первом сомножителе и строки — во втором. Это связано с тем, что между сомножителями можно вставить матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая данный факт, получаем

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (\cos\alpha-1)/\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (\cos\alpha-1)/\sin\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Формула (9) указана в [1].

5°. Неединственность деления с остатком полиномов Лорана приводит к различным вариантам факторизации полифазных матриц. Нахождение наиболее простых факторизаций становится искусством.

Часто вычисления по алгоритму Евклида организуют так, чтобы последний ненулевой остаток был константой. В примере 1 такой приём позволил получить эффектные разложения (7) и (8). Разложение (7) можно немного усовершенствовать, если привести его к виду

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1+z^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z+1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Daubechies I., Sweldens W. *Factoring wavelets transforms into lifting steps* // J. Fourier Anal. Appl. 1998. Vol. 4. No. 3. P. 247–269.

2. Малозёмов В. Н., Соловьёва Н. А. *Полиномы Лорана* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 24 октября 2009 г. (`http://dha.spb.ru/reps09.shtml#1024`).