ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ*

М. И. Григорьев

m_grigoriev@list.ru

27 июня 2007 г.

1°. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана параметрическая кривая $F(u)$, лежащая в плоскости OXZ:

$$F(u) = (f_0(u), 0, f_1(u)), \qquad f_0(u) > 0, \quad u \in [a, b].$$

Зафиксируем некоторое значение параметра u из отрезка $[a, b]$ и рассмотрим проективную кривую Безье второго порядка [1]

$$R(u,v) = \frac{P_0(u)\, b_0^2(v) + \sqrt{\mu}\, P_1(u)\, b_1^2(v) + P_2(u)\, b_2^2(v)}{b_0^2(v) + \sqrt{\mu}\, b_1^2(v) + b_2^2(v)}, \qquad v \in [0, 1], \qquad (1)$$

построенную по полюсам

$$P_0(u) = F(u) = (f_0(u), 0, f_1(u)), \qquad P_1(u) = (f_0(u), f_0(u), f_1(u)),$$
$$P_2(u) = (0, f_0(u), f_1(u))$$

с некоторым положительным параметром μ (уравнение кривой представлено в стандартной форме [2]). (Здесь $b_i^2(v)$, $i \in 0:2$, суть базисные полиномы Бернштейна второго порядка [3].) Отметим, что кривая $R(u, v)$ лежит в плоскости $Z = f_1(u)$.

Когда параметр u пробегает весь отрезок $[a, b]$, кривая $R(u, v)$ порождает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ (рис. 1). Из свойств базисных полиномов Бернштейна следует, что

$$R(u, 0) = P_0(u) = F(u), \qquad R(u, 1) = P_2(u).$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

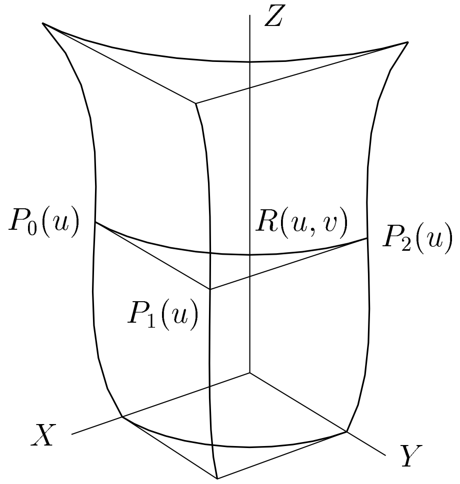

Рис. 1

2°. Примем параметр μ равным $1/2$. Зафиксируем некоторое значение параметра u из отрезка $[a,b]$. Полюса $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_2(u)$ расположены в вершинах квадрата с длиной стороны $f_0(u)$, лежащего в плоскости $Z = f_1(u)$. Известно [2], что проективная кривая Безье второго порядка, построенная по таким полюсам с $\mu = 1/2$, является четвертью окружности радиуса $f_0(u)$ (рис. 2).

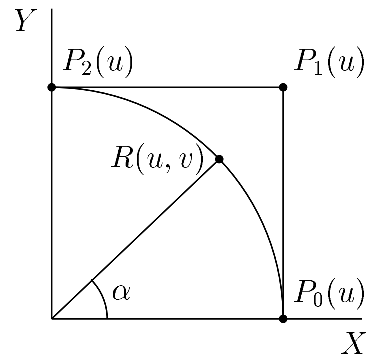

Рис. 2

Зафиксируем также некоторое значение параметра v из отрезка $[0,1]$. Точка $R(u,v)$ соответствует вращению полюса $P_0(u)$ вокруг оси OZ на угол α, косинус которого равен

$$\cos\alpha = \frac{f_0(u)\,b_0^2(v) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,f_0(u)\,b_1^2(v)}{f_0(u)} = b_0^2(v) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,b_1^2(v).$$

Заметим, что величина угла α не зависит от параметра u, значит, вышесказанное верно для всех u из $[a,b]$. То есть кривая на поверхности $R(u,v)$, соответствующая изменению параметра u при данном значении параметра v совпадает с кривой $F(u)$, повёрнутой на угол α вокруг оси OZ.

Таким образом, сечение поверхности $R(u,v)$ любой плоскостью, проходящей через ось OZ представляет собой кривую $F(u)$, повёрнутую на соответствующий угол вокруг оси OZ, а сечение $R(u,v)$ любой плоскостью, перпендикулярной оси OZ — четверть окружности. Значит, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Поверхность $R(u,v)$, $u \in [a,b]$, $v \in [0,1]$ при выбранном значении параметра $\mu = 1/2$ представляет собой четверть поверхности вращения кривой $F(u)$ вокруг оси OZ.*

Полная поверхность вращения может быть получена при помощи двух последовательных преобразований: отражения поверхности $R(u,v)$ относительно плоскости OXZ, а затем отражения полученной поверхности относительно плоскости OYZ.

Отметим также, что ограничение $f_0(u) > 0$, $u \in [a,b]$, может быть ослаблено. В случае, если существует $u_* \in [a,b]$ такое, что $f_0(u_*) = 0$, то поверхность $R(u,v)$ будет иметь вырожденную точку $R(u_*,v) = (0,0,f_1(u_*))$, $v \in [0,1]$.

3°. Рассмотрим случай, когда $F(u)$ представляет собой проективную кривую Безье n-й степени

$$F(u) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i\, P_i\, b_i^n(u)}{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(u)}, \qquad u \in [0,1], \tag{2}$$

построенную по полюсам $P_i = (p_{i0}, 0, p_{i1})$, $p_{i0} \geqslant 0$, $i \in 0:n$, лежащим в плоскости OXZ, с некоторыми положительными весами $w_0, w_1, \ldots, w_n$. Положим,

$$P_{i0} = P_i = (p_{i0}, 0, p_{i1}), \quad P_{i1} = (p_{i0}, p_{i0}, p_{i1}), \quad P_{i2} = (0, p_{i0}, p_{i1}), \quad i \in 0:n. \tag{3}$$

Перепишем (1) с учётом (2) и (3). Получим,

$$R(u,v) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} w_i\, \left(P_{i0}\, b_i^n(u)\, b_0^2(v) + \sqrt{\mu}\, P_{i1}\, b_i^n(u)\, b_1^2(v) + P_{i2}\, b_i^n(u)\, b_2^2(v)\right)}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} w_i\, b_i^n(u)\right)\left(b_0^2(v) + \sqrt{\mu}\, b_1^2(v) + b_2^2(v)\right)} = $$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{2} \omega_{ij}\, P_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^2(v)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{2} \omega_{ij}\, b_i^n(u)\, b_j^2(v)},$$

где

$$\omega_{i0} = w_i, \quad \omega_{i1} = \sqrt{\mu}\, w_i, \quad \omega_{i2} = w_i, \quad i \in 0:n. \tag{4}$$

То есть в данном случае поверхность $R(u,v)$ является проективной поверхностью Безье степени $n\times 2$ [1], построенной по полюсам P_{ij} с весами ω_{ij}, $i\in 0:n$, $j\in 0:2$.

4°. В [4] было установлено, что можно подобрать расположение полюсов и значения весов так, чтобы построенная по ним проективная поверхность Безье второго порядка представляла собой восьмую часть сферы. Аналогичный результат можно получить, воспользовавшись предыдущим пунктом 3°.

Зафиксируем три полюса и три положительных веса:

$$\begin{aligned} P_0 &= (1,0,0), & w_0 &= 1,\\ P_1 &= (1,0,1), & w_1 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2},\\ P_2 &= (0,0,1), & w_2 &= 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Построенная по этим данным проективная кривая Безье второго порядка $F(u)$ является четвертью окружности [2]. Положим $\mu = 1/2$ и построим поверхность вращения $R(u,v)$, которая, очевидно, будет являться восьмой частью сферы. В пункте 3° было показано, что данная поверхность также представляет собой проективную поверхность Безье второго порядка. Положения полюсов этой поверхности могут быть найдены из (3) и (5):

$$\begin{aligned} P_{00} &= (1,0,0), & P_{01} &= (1,1,0), & P_{02} &= (0,1,0),\\ P_{10} &= (1,0,1), & P_{11} &= (1,1,1), & P_{12} &= (0,1,1),\\ P_{20} &= (0,0,1), & P_{21} &= (0,0,1), & P_{22} &= (0,0,1), \end{aligned}$$

а значения весов определяются с помощью (4) и (5):

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= 1, & \omega_{01} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}, & \omega_{02} &= 1,\\ \omega_{10} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}, & \omega_{11} &= \tfrac{1}{2}, & \omega_{12} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \omega_{20} &= 1, & \omega_{21} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}, & \omega_{22} &= 1. \end{aligned}$$

5°. На рис. 3 и рис. 4 приведены примеры поверхностей вращения, построенных при помощи рассмотренного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. *Curves and surfaces for CAGD.* 5th ed. Academic Press, 2002.

2. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Можно ли построить окружность с помощью кривых Безье?* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 декабря 2006 г. (`http://dha.spb.ru/reps06.shtml#1216`)

3. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. №11. С. 1962-1971.

4. Григорьев М. И. *Построение сферы с помощью проективных поверхностей Безье* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 24 февраля 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0224`)

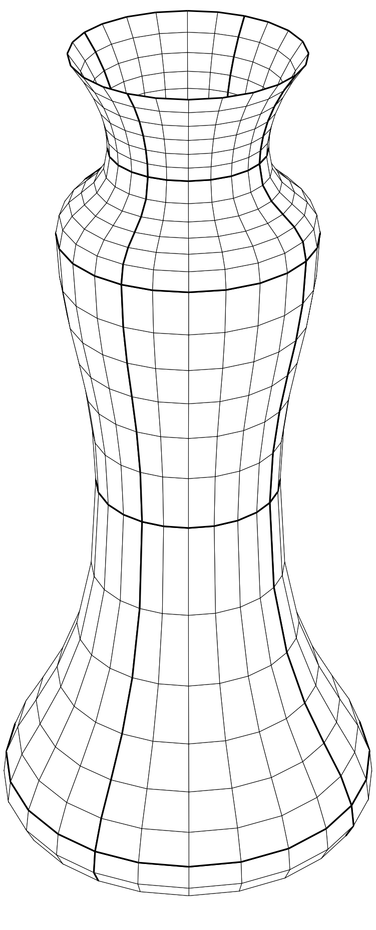

Рис. 3

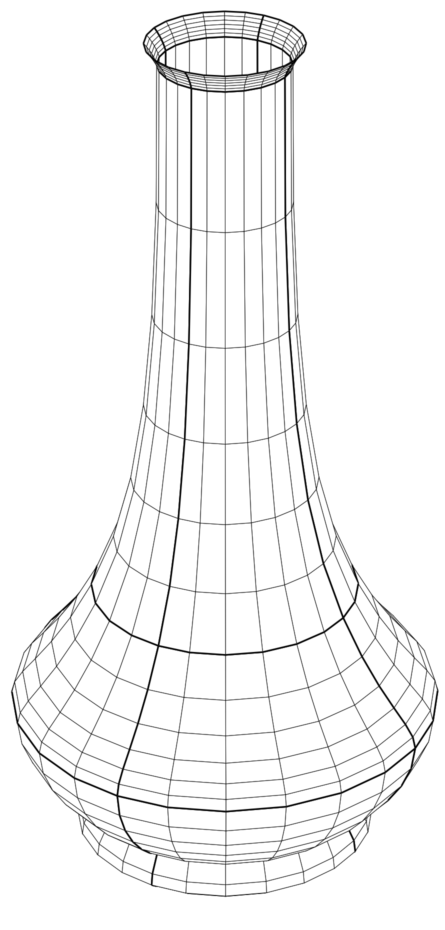

Рис. 4