ОБОБЩЁННЫЕ ПОЛИНОМЫ ШАПИРО И МАТРИЦЫ PONS*

И. С. Стояноска

irena.stoyanoska@gmail.com

19 мая 2012 г.

1°. Обобщённые полиномы Шапиро были введены в работе [1] с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered}
P_{m+1,4j}(x) = P_{m,2j}(x) + x^{2^m} P_{m,2j+1}(x), \\
P_{m+1,4j+1}(x) = P_{m,2j}(x) - x^{2^m} P_{m,2j+1}(x), \\
P_{m+1,4j+2}(x) = P_{m,2j+1}(x) + x^{2^m} P_{m,2j}(x), \\
P_{m+1,4j+3}(x) = -P_{m,2j+1}(x) + x^{2^m} P_{m,2j}(x), \\
m = 1, 2, \ldots; \quad j \in 0 : 2^{m-1} - 1,
\end{gathered} \tag{1}$$

и начальных условий

$$P_{1,0}(x) = 1 + x, \quad P_{1,1}(x) = 1 - x.$$

В докладе мы коснёмся некоторых свойств таких полиномов.

2°. Из (1), в частности, следует, что при $m = 1$ (и $j = 0$)

$$\begin{aligned}
P_{2,0}(x) &= 1 + x + x^2 - x^3, \\
P_{2,1}(x) &= 1 + x - x^2 + x^3, \\
P_{2,2}(x) &= 1 - x + x^2 + x^3, \\
P_{2,3}(x) &= -1 + x + x^2 + x^3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ясно, что полиномы $P_{m,k}(x)$ определены при $k \in 0 : 2^m - 1$, их степень равна $2^m - 1$ и все коэффициенты принимают значения ± 1. Эти полиномы

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

полностью задаются набором знаков своих коэффициентов. Так формулы (2) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
P_{2,0} &= (+++-),\\
P_{2,1} &= (++-+),\\
P_{2,2} &= (+-++),\\
P_{2,3} &= (-+++).
\end{aligned}
$$

Представим в аналогичном виде полиномы $P_{3,k}(x)$, $k \in 0:7$. На основании формул (1) при $m = 2$ и $j \in 0:1$ имеем

$$
\begin{aligned}
P_{3,0} &= (+++-++-+),\\
P_{3,1} &= (+++---+-),\\
P_{3,2} &= (++-++++-),\\
P_{3,3} &= (--+-+++-),\\
P_{3,4} &= (+-++-+++),\\
P_{3,5} &= (+-+++---),\\
P_{3,6} &= (-++++-++),\\
P_{3,7} &= (+---+-++).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

3°. Из определения обобщённых полиномов Шапиро непосредственно следует, что при всех комплексных z с $|z| = 1$ выполняется неравенство

$$|P_{m,2j}(z)|^2 + |P_{m,2j+1}(z)|^2 \leqslant 2^{m+1}.$$

На самом деле, справедлив более тонкий результат, отмеченный в [1].

ТЕОРЕМА 1. *При всех $m \geqslant 1$, $j \in 0 : 2^{m-1} - 1$ и комплексных z с $|z| = 1$ справедливо тождество*

$$|P_{m,2j}(z)|^2 + |P_{m,2j+1}(z)|^2 \equiv 2^{m+1}. \tag{4}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством, справедливым для любых комплексных чисел z_1, z_2:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

При $m = 1$ $(j = 0)$ и $|z| = 1$ получим

$$|P_{1,0}(z)|^2 + |P_{1,1}(z)|^2 = |1 + z|^2 + |1 - z|^2 \equiv 4.$$

Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$, считая, что $m \geqslant 1$.

Индекс $j \in 0 : 2^m - 1$ можно представить в виде $j = 2j'$ или $j = 2j' + 1$, где $j' \in 0 : 2^{m-1} - 1$. В первом случае на основании (1) и индукционного предположения имеем

$$\begin{gathered}|P_{m+1,2j}(z)|^2 + |P_{m+1,2j+1}(z)|^2 = |P_{m+1,4j'}(z)|^2 + |P_{m+1,4j'+1}(z)|^2 = \\ = \bigl|P_{m,2j'}(z) + z^{2^m} P_{m,2j'+1}(z)\bigr|^2 + \bigl|P_{m,2j'}(z) - z^{2^m} P_{m,2j'+1}(z)\bigr|^2 = \\ = 2\bigl(|P_{m,2j'}(z)|^2 + |P_{m,2j'+1}(z)|^2\bigr) \equiv 2^{m+2}.\end{gathered}$$

Аналогично рассматривается случай $j = 2j' + 1$.

Теорема доказана. □

4°. Выделим из (1) первые два соотношения при $j = 0$:

$$\begin{gathered}P_{m+1,0}(x) = P_{m,0}(x) + x^{2^m} P_{m,1}(x), \\ P_{m+1,1}(x) = P_{m,0}(x) - x^{2^m} P_{m,1}(x), \\ m = 1, 2, \ldots .\end{gathered}$$

К этому добавим начальные условия

$$P_{1,0}(x) = 1 + x, \quad P_{1,1}(x) = 1 - x.$$

Вспоминаем (см. [2]), что такие же рекуррентные соотношения определяют полиномы Шапиро. Значит,

$$P_{m,0}(x) = P_m(x), \quad P_{m,1}(x) = Q_m(x).$$

Известно, что векторы коэффициентов полиномов Шапиро $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ ортогональны. Аналогичное свойство имеет место и для обобщённых полиномов Шапиро.

Обозначим через $\mathbf{a}_{m,k}$ вектор коэффициентов полинома $P_{m,k}(x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Векторы* $\mathbf{a}_{m,k}$, $k \in 0 : 2^m - 1$, *попарно ортогональны и* $\|\mathbf{a}_{m,k}\|^2 = 2^m$.

Доказательство. Напомним, что координаты обобщённых полиномов Шапиро принимают значения ± 1, поэтому $\|\mathbf{a}_{m,k}\|^2 = 2^m$. Проверим ортогональность. При $m = 1$ она очевидна. Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$. Для этого перепишем соотношения (1) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{m+1,4j} &= (\mathbf{a}_{m,2j}, \mathbf{a}_{m,2j+1}), \\ \mathbf{a}_{m+1,4j+1} &= (\mathbf{a}_{m,2j}, -\mathbf{a}_{m,2j+1}), \\ \mathbf{a}_{m+1,2j+2} &= (\mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j}), \\ \mathbf{a}_{m+1,4j+3} &= (-\mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j}).\end{aligned}$$

По индукционному предположению, $\langle \mathbf{a}_{m,k}, \mathbf{a}_{m,k'} \rangle = 0$ при $k \neq k'$. Значит,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_{m+1,4j}, \mathbf{a}_{m+1,4j+1} \rangle &= \langle \mathbf{a}_{m,2j}, \mathbf{a}_{m,2j} \rangle - \langle \mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j+1} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{a}_{m+1,4j}, \mathbf{a}_{m+1,4j+2} \rangle &= \langle \mathbf{a}_{m,2j}, \mathbf{a}_{m,2j+1} \rangle + \langle \mathbf{a}_{m,2j+1}, \mathbf{a}_{m,2j} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\langle \mathbf{a}_{m+1,4j+\sigma}, \mathbf{a}_{m+1,4j'+\sigma'} \rangle = 0 \quad \text{при } (j,\sigma) \neq (j',\sigma').$$

Теорема доказана. $\square$

5°. Квадратная матрица $\mathcal{P}_m$ порядка 2^m со строками

$$\mathbf{a}_{m,0}, \mathbf{a}_{m,1}, \ldots, \mathbf{a}_{m,2^m-1}$$

называется матрицей PONS [3]. Формула (3) даёт представление о матрице $\mathcal{P}_3$. Матрица $\mathcal{P}_4$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}_4 = \begin{bmatrix}
+ & + & + & - & + & + & - & + & + & + & + & - & - & - & + & - \\
+ & + & + & - & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + \\
+ & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + & - & + & + & - & + \\
- & - & - & + & + & + & - & + & + & + & + & - & + & + & - & + \\
+ & + & - & + & + & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + & - \\
+ & + & - & + & + & + & + & - & + & + & - & + & - & - & - & + \\
- & - & + & - & + & + & + & - & + & + & - & + & + & + & + & - \\
+ & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + & + & + & + & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + \\
+ & - & + & + & + & - & - & - & + & - & + & + & - & + & + & + \\
- & + & - & - & - & + & + & + & + & - & + & + & - & + & + & + \\
- & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & + & + \\
- & + & + & + & + & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - \\
+ & - & - & - & + & - & + & + & - & + & + & + & + & - & + & + \\
- & + & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + & + & - & + & +
\end{bmatrix}.$$

Строку с индексом k матрицы $\mathcal{P}_m$ можно воспринимать как значения дискретного сигнала

$$p_k(j) = \mathbf{a}_{m,k}(j), \quad k, j \in 0 : 2^m - 1.$$

Согласно теореме 2 сигналы p_k попарно ортогональны и $\|p_k\|^2 = 2^m$ при всех $k \in 0 : 2^m - 1$. Это позволяет включить систему сигналов $\{p_k\}$ в аппарат дискретного гармонического анализа.

На рис. 1 изображены графики функций $p_k(j)$ при $m = 3$.

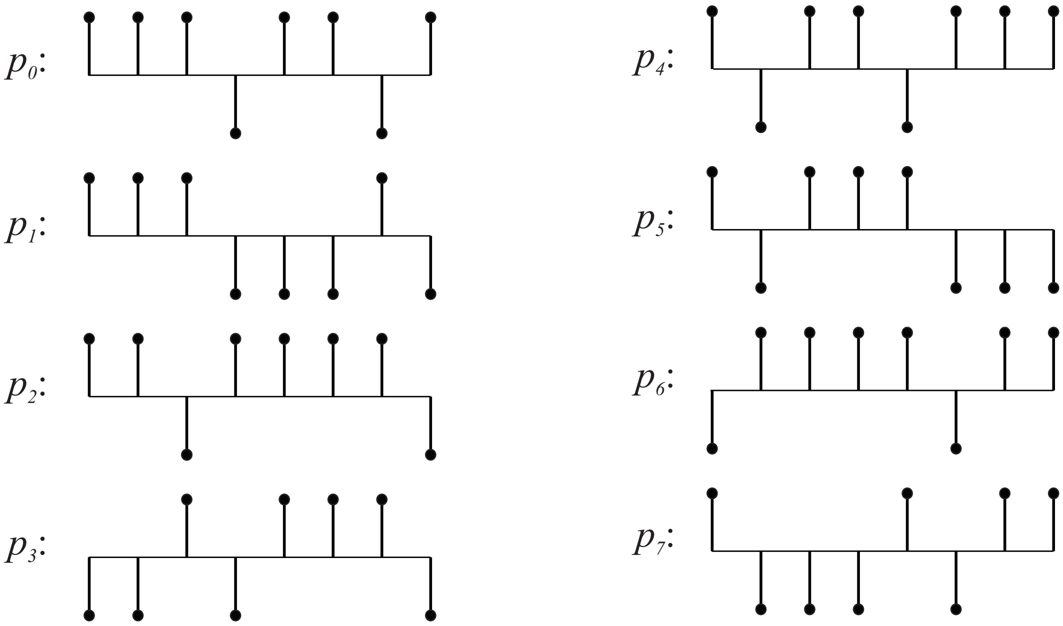

Рис. 1

Сформулируем две гипотезы.

ГИПОТЕЗА 1. *Матрицы $\mathcal{P}_m$ при всех $m \geqslant 1$ симметричны.*

При $m = 1, 2, 3$ симметричность проверяется непосредственно. Симметричность матриц $\mathcal{P}_m$ до $m = 10$ была проверена с помощью компьютерной программы.

Положим $n = 2^m$. Через $k = (k_{m-2}, k_{m-3}, \ldots, k_0)_2$ обозначим двоичный код числа $k \in 0 : \frac{n}{2} - 1$.

ГИПОТЕЗА 2. *При всех $m \geqslant 2$ и $k, k' \in 0 : \frac{n}{2} - 1$, справедливо соотношение*

$$p_k(j) p_{k'}(j) = \alpha^m_{k,k'} \, p_{\frac{n}{2}+k}(j) p_{\frac{n}{2}+k'}(j), \quad j \in 0 : n - 1, \tag{5}$$

где

$$\alpha^m_{k,k'} = (-1)^{k_{m-2}+k'_{m-2}}.$$

При $m=3$ матрица коэффициентов $\{\alpha^3_{k,k'}\}$ выглядит так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Справедливость формулы (5) при $m=2,3$ проверяется непосредственно, а при $m=4,5,\ldots,10$ — с помощью компьютерной программы.

6°. Любой вещественный сигнал $x=x(j)$, $j\in 0:n-1$, можно разложить по PONS-базису $\{p_k(j)\}_{k=0}^{n-1}$:

$$x(j)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle x,p_k\rangle\, p_k(j), \quad j\in 0:n-1.$$

Рассмотрим частные суммы

$$x_\nu=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\nu-1}\langle x,p_k\rangle\, p_k, \quad \nu\in 1:n. \tag{6}$$

Они допускают представление

$$x_\nu=D_{m,\nu}\,x, \tag{7}$$

где $D_{m,\nu}$ — квадратные матрицы вида

$$D_{m,\nu}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\nu-1}\mathbf{a}^\top_{m,k}\,\mathbf{a}_{m,k}.$$

Мы воспользовались определением сигналов p_k и тем, что $\mathbf{a}_{m,k}$ — вектор-строки. Отметим, что формула (6) — это равенство строк, а формула (7) — равенство столбцов.

Константой Лебега называется норма матрицы $D_{m,\nu}$, согласованная с равномерной нормой сигнала. Обозначим её $L_{m,\nu}$. По определению

$$L_{m,\nu}=\max_{i\in 0:n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\bigl|D_{m,\nu}[i,k]\bigr|.$$

Сформулируем еще две гипотезы.

ГИПОТЕЗА 3. *Константы Лебега $L_{m,\nu}$ не зависят от m.*

Табл. поясняет эту гипотезу.

Таблица

m	$L_{m,\nu}$, $\nu \in 1:2^m$															
2	1	1	$\frac{3}{2}$	1												
3	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1								
4	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	1
5	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	1

ГИПОТЕЗА 4. *При $m \geqslant 2$ верны формулы*

$$L_{m,2^s} = 1, \quad s \in 0:m; \tag{8}$$

$$L_{m,2^s+j} = L_{m,2^s-j} + \frac{j}{2^s}, \quad j \in 1:2^s-1,\ s = 1,2,\ldots,m-1. \tag{9}$$

Справедливость этой гипотезы до $m = 6$ проверена на компьютере. Полученное мной предварительное доказательство гипотезы 4 опирается на гипотезы 1, 2 и 3.

Формулы (8), (9) позволяют вычислить значения $L_{m,\nu}$ при всех $\nu \in 1:n$. Согласно (8), $L_{m,1} = L_{m,2} = 1$. При $s = 1$ и $j = 1$ в силу (9) находим $L_{m,3}$. При каждом следующем s вычисляются значения $L_{m,\nu}$ при ν от 2^s до $2^{s+1}-1$.

На рис. 2 изображён график $L_{m,\nu}$ как функции от ν при $m = 6$.

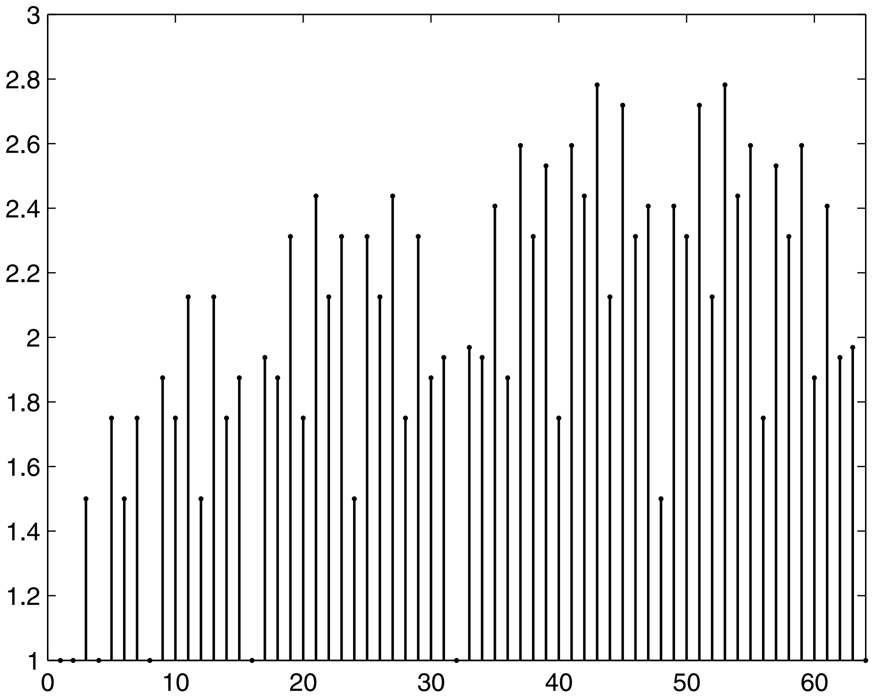

Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Byrnes J. S. *Quadrature mirror filters, low crest factor arrays, functions achieving optimal uncertainty principle bounds, and complete orthonormal sequences — a unified approach* // Applied and Computational Harmonic Analysis. 1994. Vol. 1, P. 261–266.

2. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Полиномы Шапиро и коды Рида-Маллера* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 26 ноября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

3. An M., Byrnes J., Moran W., Saffari B., Shapiro H. S., Tolimieri R. *PONS, Reed-Muller codes, and group algebras* // NATO Advanced Study Institute: Computational Noncommutative Algebra and Applications. Tuscany, Italy. July 2003. P. 155–197.