ПОЛИНОМЫ ШАПИРО ВТОРОГО РОДА*

И. С. Стояноска
irena.stoyanoska@gmail.com

17 марта 2012 г.

1°. Полиномы Шапиро определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x) &= P_m(x) + x^{2^m} Q_m(x), \\ Q_{m+1}(x) &= P_m(x) - x^{2^m} Q_m(x). \end{aligned} \tag{1}$$

при $m = 0, 1, \ldots$ и начальных условий

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv 1$$

(см. [1, 2]). Полином $Q_m(x)$ называется *дополнительным* к полиному $P_m(x)$. Оба полинома $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ имеют степень $2^m - 1$.

Коэффициенты полиномов Шапиро принимают значения ± 1. Для них можно записать явное представление. Пусть

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k\, x^k, \quad Q_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} b_k\, x^k.$$

С индексом $k \in 0 : 2^m - 1$ свяжем его двоичный код

$$k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_0)_2,$$

где $k_\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда (см. [2–4]) при $m \geqslant 2$ и $k \in 0 : 2^m - 1$

$$a_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}\, k_\alpha}, \quad b_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}\, k_\alpha + k_{m-1}}. \tag{2}$$

Величина

$$\varphi(k) = \sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}\, k_\alpha$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

показывает, сколько раз в двоичном коде индекса k встречается блок $[1\ \ 1]$.

Полиномы Шапиро второго рода определим с помощью тех же рекуррентных соотношений (1), но при других начальных условиях

$$P_0(x) \equiv 1, \quad Q_0(x) \equiv -1.$$

Соответствующие полиномы обозначим $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$. В статье изучаются их свойства, включая связь с полиномами Шапиро первого рода.

2°. Из (1), в частности, следует, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_1(x) = 1 - x, && \tilde{Q}_1(x) = 1 + x,\\
&\tilde{P}_2(x) = 1 - x + x^2 + x^3, && \tilde{Q}_2(x) = 1 - x - x^2 - x^3,\\
&\tilde{P}_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3 + && \tilde{Q}_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3 -\\
&\qquad\quad + x^4 - x^5 - x^6 - x^7, && \qquad\quad - x^4 + x^5 + x^6 + x^7.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Справедливы формулы*

$$\tilde{P}_{m+1}(x) = \tilde{P}_m(-x^2) - x\,\tilde{P}_m(x^2), \quad m = 0, 1, \ldots; \tag{3}$$

$$\tilde{Q}_{m+1}(x) = \tilde{Q}_m(-x^2) - x\,\tilde{Q}_m(x^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Доказательство. Тождество (3) при $m = 0, 1, 2$ и тождество (4) при $m = 1, 2$ проверяются непосредственно. Сделаем индукционный переход от m к $m+1$, считая, что $m \geqslant 2$.

Перепишем соотношения (1), заменив в них m на $m-1$ и x на x^2:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_m(x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(x^2),\\
\tilde{Q}_m(x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(x^2) - x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(x^2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Теперь заменим в (1) m на $m-1$ и x на $-x^2$. Учитывая, что $(-x^2)^{2^{m-1}} = x^{2^m}$ при $m \geqslant 2$, получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_m(-x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(-x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(-x^2),\\
\tilde{Q}_m(-x^2) &= \tilde{P}_{m-1}(-x^2) - x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(-x^2).
\end{aligned} \tag{6}$$

На основании (1), (5), (6) и индукционного предположения придём к формуле (3). Действительно,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{m+1}(x) &= \tilde{P}_m(x) + x^{2^m}\tilde{Q}_m(x) = \tilde{P}_{m-1}(-x^2) - x\tilde{P}_{m-1}(x^2) +\\
&\quad + x^{2^m}\big[\tilde{Q}_{m-1}(-x^2) - x\,\tilde{Q}_{m-1}(x^2)\big] = \tilde{P}_{m-1}(-x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(-x^2) -\\
&\quad - x\big[\tilde{P}_{m-1}(x^2) + x^{2^m}\tilde{Q}_{m-1}(x^2)\big] = \tilde{P}_m(-x^2) - x\,\tilde{P}_m(x^2).
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется справедливость формулы (4). $\square$

3°. Пусть

$$\tilde{P}_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} c_k\, x^k, \quad \tilde{Q}_m(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} d_k\, x^k.$$

ЛЕММА 2. *Для коэффициентов c_k справедливы рекуррентные соотношения: $c_0 = 1$ и*

$$c_{2k} = (-1)^k c_k, \quad c_{2k+1} = -c_k \tag{7}$$

при $k \in 0 : 2^{m-1} - 1$ и $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Согласно (3)

$$\tilde{P}_m(x) = \tilde{P}_{m-1}(-x^2) - x\tilde{P}_{m-1}(x^2) = \\ = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\,(-x^2)^k - \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\, x^{2k+1}.$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

Рекуррентные соотношения (7) при $k \geqslant 1$ можно объединить в одну формулу

$$c_{2k+\sigma} = (-1)^{k(\sigma+1)+\sigma} c_k, \tag{8}$$

где $\sigma \in \{0, 1\}$. При этом $c_0 = 1$, $c_1 = -1$.

4°. Получим явное представление для коэффициентов c_k полинома $\tilde{P}_m(x)$. Пусть $k = (k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$ — двоичный код индекса $k \in 0 : 2^m - 1$.

ТЕОРЕМА 1. *При $k \in 0 : 2^m - 1$, $m \geqslant 2$ справедлива формула*

$$c_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha + k_0}. \tag{9}$$

Доказательство проведём по индукции. При $m = 2$, когда $k = (k_1, k_0)_2$, формула (9) проверяется непосредственно (с учётом того, что $c_2 = 1$, $c_3 = 1$). Сделаем индукционный переход от m к $m + 1$, считая, что $m \geqslant 2$.

Пусть $k \in 0 : 2^{m+1} - 1$. Представим k в виде $k = 2k' + \sigma$, где $k' \in 0 : 2^m - 1$ и $\sigma \in \{0, 1\}$. Запишем $k' = (k'_{m-1}, k'_{m-2}, \ldots, k'_0)_2$. Тогда

$$k = (k'_{m-1}, \ldots, k'_0, \sigma)_2.$$

Согласно (8)

$$c_{2k'+\sigma} = (-1)^{k'(\sigma+1)+\sigma}\, c_{k'} = (-1)^{k'_0(\sigma+1)+\sigma}\, c_{k'}.$$

Воспользуемся индукционным предположением, согласно которому

$$c_{k'} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k'_{\alpha-1}k'_\alpha + k'_0}.$$

Получим

$$\begin{aligned} c_k = c_{2k'+\sigma} = (-1)^{k'_0(\sigma+1)+\sigma+\sum_{\alpha=1}^{m-1} k'_{\alpha-1}k'_\alpha+k'_0} = \\ = (-1)^{k'_0\sigma+\sigma+\sum_{\alpha=2}^{m} k_{\alpha-1}k_\alpha} = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m} k_{\alpha-1}k_\alpha+k_0}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

В силу (1) при $m \geqslant 1$

$$Q_m(x) = P_{m-1}(x) - [P_m(x) - P_{m-1}(x)].$$

Значит, при $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} d_k &= c_k \quad \text{когда } k \in 0 : 2^{m-1} - 1, \\ d_k &= -c_k \quad \text{когда } k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \end{aligned} \tag{10}$$

На основании (9) и (10) заключаем, что при $m \geqslant 2$

$$d_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-1} k_{\alpha-1}k_\alpha+k_0+k_{m-1}}, \quad k \in 0 : 2^m - 1. \tag{11}$$

5°. Обозначим через **a**, **b**, **c**, **d** векторы коэффициентов полиномов Шапиро первого и второго рода.

ТЕОРЕМА 2. *Векторы* **a**, **b**, **c**, **d** *попарно ортогональны.*

Доказательство следует из формул (2) и (9), (11), если учесть, что

$$\sum_{k=0}^{2^m-1}(-1)^{k_0} = 0, \quad \sum_{k=0}^{2^m-1}(-1)^{k_{m-1}} = 0.$$ □

6°. Продолжим изучение полиномов Шапиро второго рода.

ЛЕММА 3. *При* $m \geqslant 2$ *справедливо соотношение*

$$c_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k}\, c_k, \quad k \in 0 : 2^{m-1} - 1. \tag{12}$$

Доказательство. При $m = 2$ равенство (12) проверяется непосредственно. Будем считать, что $m \geqslant 3$.

Пусть $k \in 0 : 2^{m-1} - 1$, $k = (k_{m-2}, \ldots, k_0)_2$. Согласно (9)

$$c_k = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_{\alpha-1}\, k_\alpha+k_0}.$$

Обозначим $k' := 2^m - 1 - k = (1,\, 1 - k_{m-2}, \ldots, 1 - k_0)_2$. В силу (9)

$$\begin{aligned} c_{k'} &= (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{m-2}(1-k_{\alpha-1})(1-k_\alpha)+1-k_{m-2}+1-k_0} = \\ &= (-1)^{m-2\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_\alpha-k_0+k_{m-2}+\sum_{\alpha=1}^{m-2} k_{\alpha-1}k_\alpha-k_{m-2}-k_0} = (-1)^{m+k}c_k. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Формулу (12) можно переписать в эквивалентном виде

$$c_{2^m-1-k} = (-1)^{m+k+1}\, c_k, \quad k \in 2^{m-1} : 2^m - 1. \tag{13}$$

Действительно, положим $k' = 2^m - 1 - k,\ k' \in 0 : 2^{m-1} - 1$. На основании (12) получим

$$c_{2^m-1-k'} = (-1)^{m+k'} c_{k'},$$

что равносильно (13).

7°. Рассмотрим полиномы Шапиро второго рода как функции комплексной переменной z. Особый интерес представляет случай, когда $|z| = 1$.

ТЕОРЕМА 3. *При $m \geqslant 1$ справедливы тождества*

$$\tilde{P}_m(-z) = (-1)^{m+1} z^{2^m-1} \tilde{Q}_m(\tfrac{1}{z}), \tag{14}$$

$$\tilde{Q}_m(-z) = (-1)^m z^{2^m-1} \tilde{P}_m(\tfrac{1}{z}). \tag{15}$$

Доказательство. При $m = 1$ указанные тождества проверяются непосредственно. Будем считать, что $m \geqslant 2$.

Согласно (10) имеем

$$(-1)^{m+1} z^{2^m-1}\, \tilde{Q}_m(\tfrac{1}{z}) = (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{2^m-1} d_k\, z^{2^m-1-k} =$$

$$= (-1)^{m+1} \Big[\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\, z^{2^m-1-k} - \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} c_k\, z^{2^m-1-k} \Big].$$

Вместе с тем, в силу (13)

$$\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_k\, z^{2^m-1-k} = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} c_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} (-1)^{m+k+1} c_k\, z^k$$

и в силу (12)

$$-\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} c_k\, z^{2^m-1-k} = -\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} c_{2^m-1-k}\, z^k = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} (-1)^{m+k+1} c_k\, z^k.$$

Значит,

$$(-1)^{m+1} z^{2^m-1}\, \tilde{Q}_m(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{2^m-1} (-1)^k c_k\, z^k = \tilde{P}_m(-z).$$

Справедливость тождества (14) установлена.

Подставим в (14) $-\frac{1}{z}$ вместо z. Получим

$$\tilde{P}_m(\tfrac{1}{z}) = (-1)^{m+1} (-\tfrac{1}{z})^{2^m-1} \tilde{Q}_m(-z) = (-1)^m z^{-2^m+1} \tilde{Q}_m(-z),$$

что равносильно (15). Теорема доказана. $\square$

8°. Пусть $\theta(m)$ — количество положительных коэффициентов у полинома Шапиро первого рода $P_m(x)$. Известно (см. [2, 4]), что при $m \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \theta(2m) &= 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \\ \theta(2m+1) &= 2^{2m} + 2^{m}. \end{aligned} \tag{16}$$

Выведем соответствующие формулы для дополнительного полинома $Q_m(x)$. Количество его положительных коэффициентов обозначим $\eta(m)$. По определению $\eta(1) = 1$.

ЛЕММА 4. *При $m \geqslant 1$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \eta(2m) &= 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \\ \eta(2m+1) &= 2^{2m}. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Из рекуррентных соотношений (1) для полиномов Шапиро следует, что при $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \theta(m) &= \theta(m-1) + \eta(m-1), \\ \eta(m) &= \theta(m-1) + [2^{m-1} - \eta(m-1)]. \end{aligned}$$

Сложим эти равенства. Получим

$$\eta(m) = 2^{m-1} + 2\theta(m-1) - \theta(m). \tag{18}$$

Подставим в (18) сначала $2m$, а затем $2m+1$ вместо m и воспользуемся формулами (16). Придём к соотношениям

$$\begin{aligned} \eta(2m) &= 2^{2m-1} + 2[2^{2m-2} + 2^{m-1}] - 2^{2m-1} - 2^{m-1} = 2^{2m-1} + 2^{m-1}, \\ \eta(2m+1) &= 2^{2m} + 2[2^{2m-1} + 2^{m-1}] - 2^{2m} - 2^{m} = 2^{2m}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Обозначим через $\tilde{\theta}(m)$ и $\tilde{\eta}(m)$ количество положительных коэффициентов у полиномов Шапиро второго рода $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4. *При $m \geqslant 1$ справедливы равенства*

$$\tilde{\theta}(2m) = \theta(2m), \tag{19}$$

$$\tilde{\theta}(2m+1) = \eta(2m+1), \tag{20}$$

$$\tilde{\eta}(2m) = 2^{2m} - \eta(2m), \tag{21}$$

$$\tilde{\eta}(2m+1) = \theta(2m+1). \tag{22}$$

Доказательство. При $m = 1$ равенства (19)–(22) проверяются непосредственно. Сделаем индукционный переход от m к $m+1$, считая, что $m \geqslant 1$.

Согласно индукционному предположению имеем

$$\tilde{\theta}(2m+2) = \tilde{\theta}(2m+1) + \tilde{\eta}(2m+1) = \eta(2m+1) + \theta(2m+1) = \theta(2m+2). \quad (23)$$

Соотношение (19) установлено. Аналогично проверяется соотношение (21):

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(2m+2) &= \tilde{\theta}(2m+1) + [2^{2m+1} - \tilde{\eta}(2m+1)] = \eta(2m+1) + 2^{2m+1} - \\ &\quad - \theta(2m+1) = 2^{2m+2} - [\theta(2m+1) + (2^{2m+1} - \eta(2m+1))] = \\ &= 2^{2m+2} - \eta(2m+2). \end{aligned} \quad (24)$$

Что касается соотношений (20) и (22), то они выводятся с использованием (23) и (24). Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(2m+3) &= \tilde{\theta}(2m+2) + \tilde{\eta}(2m+2) = \theta(2m+2) + [2^{2m+2} - \eta(2m+2)] = \\ &= \eta(2m+3); \\ \tilde{\eta}(2m+3) &= \tilde{\theta}(2m+2) + [2^{2m+2} - \tilde{\eta}(2m+2)] = \theta(2m+2) + 2^{2m+2} - \\ &\quad - [2^{2m+2} - \eta(2m+2)] = \theta(2m+3). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Shapiro H. S. *Extremal problems for polynomials and power series.* Master's thesis. Cambrige, Mass., 1951.

2. Brillhart J., Carlitz L. *Note on the Shapiro polynomials* // Proceedings of the AMS. 1970. Vol. 25. No. 1. P. 114–118.

3. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Полиномы Шапиро и коды Рида-Маллера* // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию. Избранные доклады. 26 ноября 2011 г. (`http://dha.spb.ru/reps11.shtml#1126`)

4. Малозёмов В. Н., Стояноска И. С. *Дальнейшие свойства полиномов Шапиро* // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию. Избранные доклады. 28 января 2012 г. (`http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0128`)