НЕРАВЕНСТВО СИДЕЛЬНИКОВА*

Н. О. Котелина
nkotelina@gmail.com

А. Б. Певный
pevnyi@syktsu.ru

25 октября 2013 г.

Интегральное неравенство В. М. Сидельникова было установлено в 1974 г. с очень трудным доказательством. Дискретный вариант неравенства Сидельникова изучали Гётальс, Зайдель (1979) и Б. Б. Венков (2001). В их работах установлены условия, при которых дискретное неравенство обращается в равенство. Предлагается простое доказательство неравенства Сидельникова, основанное на идее Венкова.

1°. Неравенство Сидельникова. Пусть $\langle x, y\rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Пусть t — натуральное число, $U \subset \mathbb{R}^n$ и μ — мера на U такая, что $\int_U \|x\|^t \, d\mu_x < \infty$.

В. М. Сидельников [1] установил два неравенства. Первое очень простое, второе (для чётного t) — трудное и содержательное.

Для проивольного натурального t справедливо неравенство

$$\int_U \int_U \langle x, y\rangle^t \, d\mu_x \, d\mu_y \geqslant 0. \tag{1}$$

Это легко доказать с помощью мультииндексной техники. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geqslant 0$. Обозначим

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Неравенство (1) доказывается в одну строчку

$$\int_U \int_U \langle x, y\rangle^t \, d\mu_x \, d\mu_y = \int_U \int_U \Big(\sum_{|\alpha|=t} \frac{t!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha \Big) \, d\mu_x \, d\mu_y = \sum_{|\alpha|=t} \frac{t!}{\alpha!} \Big(\int_U x^\alpha \, d\mu_x \Big)^2 \geqslant 0.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Пусть далее t — чётное число.

ТЕОРЕМА 1 (В. М. Сидельников [1]). *Справедливо неравенство*

$$\int_U \int_U \langle x,\, y\rangle^t \, d\mu_x \, d\mu_y \geqslant c_t \Big(\int_U \|x\|^t \, d\mu_x\Big)^2, \tag{2}$$

где

$$c_t = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} \xi_1^t \, dS_\xi \tag{3}$$

— среднее значение функции $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \xi_1^t$ *на единичной сфере* S^{n-1} *в* $\mathbb{R}^n$*,* σ_n *— площадь сферы* S^{n-1}*,* $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$*.*

Это сильный результат, но доказательство в [1] весьма сложное. Мы приведём более простое доказательство.

ЛЕММА 1. *Для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *справедливо тождество*

$$\int_{S^{n-1}} \langle x,\, \xi\rangle^t \, dS_\xi = \sigma_n c_t \|x\|^t. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Константу (3) можно записать в виде

$$c_t = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} \langle \eta,\, \xi\rangle^t \, dS_\xi,$$

где η — произвольный вектор из S^{n-1}. Подставив $\eta = x/\|x\|$, получим тождество (4). $\square$

Пусть $\mathrm{Hom}(t)$ — пространство однородных полиномов степени t над $\mathbb{R}$ от n переменных. Следуя Б. Б. Венкову [6], введём в $\mathrm{Hom}(t)$ скалярное произведение. Для полиномов

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha x^\alpha,\ g(x) = \sum_{|\alpha|=t} b_\alpha x^\alpha$$

из $\mathrm{Hom}(t)$ положим

$$[f,\, g] = \sum_{|\alpha|=t} \frac{\alpha!}{t!} a_\alpha b_\alpha.$$

Для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ введём полином $\rho_y(x) = \langle y,\, x\rangle^t$. Легко проверить, что

$$[\rho_y,\, f] = f(y), \quad f \in \mathrm{Hom}(t). \tag{5}$$

Действительно,

$$[\rho_y,\, f] = \sum_{|\alpha|=t} \frac{\alpha!}{t!} \frac{t!}{\alpha!} y^\alpha a_\alpha = f(y).$$

ЛЕММА 2. *Для полинома $\omega_t(x) = \|x\|^t$ справедливо равенство*

$$[\omega_t,\, \omega_t] = \frac{1}{c_t}. \tag{6}$$

Доказательство. Обе части тождества (4) умножим скалярно на $\omega_t(x)$. Получим

$$\int_{S^{n-1}} \big[\langle x,\, \xi\rangle^t,\, \omega_t(x)\big]\, dS_\xi = \sigma_n c_t[\omega_t,\, \omega_t].$$

По воспроизводящему свойству (5) $\big[\langle x,\, \xi\rangle^t,\, \omega_t(x)\big] = \omega_t(\xi) = 1$, так как $\|\xi\| = 1$. Поэтому интеграл равен σ_n. Получаем равенство $1 = c_t[\omega_t, \omega_t]$. □

Доказательство теоремы 1. Оказывается, что неравенство (2) есть ни что иное, как неравенство Коши-Шварца

$$[A,\, A][\omega_t,\, \omega_t] \geqslant [A,\, \omega_t]^2 \tag{7}$$

для полиномов

$$A(x) = \int_U \langle y,\, x\rangle^t\, d\mu_y, \quad \omega_t(x) = \|x\|^t.$$

Представим $A(x)$ в виде

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=t} \frac{t!}{\alpha!} M_\alpha x^\alpha,$$

где $M_\alpha = \int_U y^\alpha\, d\mu_y$. Вычислим скалярные произведения $[A,\, A]$ и $[A,\, \omega_t]$. Для этого заметим, что для любого полинома $f(x) = \sum_{|\alpha|=t} a_\alpha x^\alpha$ справедливы равенства

$$[A,\, f] = \sum_{|\alpha|=t} \frac{\alpha!}{t!}\frac{t!}{\alpha!} M_\alpha a_\alpha = \int_U \sum_{|\alpha|=t} y^\alpha a_\alpha\, d\mu_y = \int_U f(y)\, d\mu_y.$$

Отсюда получаем

$$[A,\, A] = \int_U A(z)\, d\mu_z = \int_U \int_U \langle y,\, z\rangle^t\, d\mu_y\, d\mu_z,$$
$$[A,\, \omega_t] = \int_U \omega_t(y)\, d\mu_y = \int_U \|y\|^t\, d\mu_y.$$

Кроме того, $[\omega_t,\, \omega_t] = 1/c_t$ по лемме 2. Подставим скалярные произведения в (7) и умножим неравенство на c_t. Получим (2). □

Из доказательства следует условие, при котором неравенство (2) обращается в равенство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* $I_t = \int_U \|x\|^t \, d\mu_x$. *Неравенство* (2) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\int_U \langle y,\, x\rangle^t \, d\mu_y \equiv c_t I_t \|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что в (2) имеет место равенство. Тогда равенство будет и в неравенстве Коши-Шварца (7). Поэтому существует константа λ такая, что $A = \lambda\omega_t$. Умножим это равенство скалярно на ω_t. Получим соотношение $[A,\, \omega_t] = \lambda[\omega_t,\, \omega_t]$. При доказательстве теоремы 1 было отмечено, что $[A,\, \omega_t] = I_t$, $[\omega_t,\, \omega_t] = 1/c_t$. Отсюда следуют равенства $\lambda = c_t I_t$ и $A = c_t I_t \omega_t$. Последнее в развёрнутом виде представляет собой тождество (8).

Обратно, если выполнено (8), то $A = c_t I_t \omega_t$. Отсюда следует, что в (7) и (2) будут равенства. □

Отметим частный случай $U = S^{n-1}$ и μ — обычная мера Лебега на сфере, $\mu(S^{n-1}) = \sigma_n$. Тогда

$$I_t = \int_{S_{n-1}} \|x\|^t \, d\mu_x = \int_{S^{n-1}} d\mu_x = \sigma_n.$$

Теперь тождество (8) выполняется по лемме 1. Значит, при $U = S^{n-1}$ неравенство (2) обращается в равенство. Этот факт отмечен в [1]. Другой частный случай — дискретное множество U — рассматривается в пункте 2.

Вычисление константы c_t. Необходимо вычислить интеграл (3), но мы вычислим более общий интеграл, так как он будет использован в дальнейшем.

ЛЕММА 3. *Пусть в мультииндексе* $k = (k_1, \dots, k_n)$ *все* k_j *— чётные,* $|k| = t$. *Тогда*

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \, dS = \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)}. \tag{9}$$

Здесь $(-1)!! = 1$ *и при* $t = 2$ *множитель* $n + 2$ *отсутствует.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл $V = \int_{\mathbb{R}^n} x^k e^{-\|x\|^2} \, dx$. Он распадается на произведение одномерных интегралов: $V = \Gamma(\frac{k_1+1}{2}) \cdots \Gamma(\frac{k_n+1}{2})$. А после перехода к сферическим координатам приходим к равенству $V = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{t+n}{2})\sigma_n I(k)$. Отсюда получаем выражение для $I(k)$, которое легко приводится к виду (9). □

Другой способ вывода формулы (9) можно найти в [8, 9]. Выражение для c_t получается из (9) как частный случай:

$$c_t = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x_1^t \, dS = \frac{(t-1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)}. \tag{10}$$

2°. Дискретный вариант неравенства Сидельникова. Интересный вариант неравенства Сидельникова получается, когда U — конечное множество, $U = \{x_1, \dots, x_m\}$, $\mu(\{x_i\}) = 1$, $i = 1, \dots, m$. Тогда по теореме 1 справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i, x_j\rangle^t \geqslant c_t\left(\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^t\right)^2. \tag{11}$$

Напомним, что t — чётное число. В неравенстве (11) векторы $x_1, \dots, x_m$ не обязательно попарно различны, поэтому вместо множества U можно говорить о конечной последовательности.

Некоторые авторы, не зная работы [1], получали неравенство (11) самостоятельно. При $t = 2$ неравенство (11) доказывалось в [2], а при $t \geqslant 4$ — в [3]. При этом в [2, 3] исследовался вопрос, когда в (11) будет равенство.

Вопрос о достижении равенства нас интересует особо. Формулировки получатся более выразительными, если считать, что последовательность $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ лежит на сфере S^{n-1}. Из теоремы 1 и Предложения из пункта 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Для любой последовательности* $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ *точек сферы* S^{n-1} *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m}\langle x_i,\, x_j\rangle^t \geqslant c_t. \tag{12}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle x_i,\, x\rangle^t \equiv c_t\|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Примем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность точек $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ на сфере S^{n-1} называется *сферическим полудизайном порядка* t, если выполнено тождество (13).

Теорема 2 утверждает, что неравенство (12) обращается в равенство на сферических полудизайнах и только на них.

Тождество (13) будем называть тождеством Варинга по имени английского математика Э. Варинга (1734-1798), который интересовался представлением формы $\|x\|^t$ в виде суммы линейных форм, возведённых в степень t. Многие математики 19-го века получали тождества Варинга при разных n, t, m. Коллекция таких тождеств приведена в [5, p. 103].

ПРИМЕР (E. Lucas, 1876)**.** Легко проверяется тождество

$$6\|\xi\|^4 = \sum_{i<j} (\xi_i \pm \xi_j)^4$$

для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_4)$ из $\mathbb{R}^4$. В нём $2\binom{4}{2} = 12$ слагаемых. Нетрудно выписать векторы $x_1, \dots, x_{12} \in S^3$, для которых выполнено (13) при $m = 12$, $n = 4$, $t = 4$. Эти 12 векторов образуют сферический полудизайн порядка 4.

Характеризация полудизайнов с помощью интегралов по сфере. Общепринятым является определение сферического дизайна порядка t как системы точек на сфере S^{n-1} такой, что для любого полинома степени не выше t среднее по сфере равно среднему по дизайну (см. [7]).

Аналогичная характеризация может быть дана для сферических полудизайнов.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть t чётное, $t \geqslant 2$. Для того, чтобы последовательность $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ точек сферы S^{n-1} была сферическим полудизайном порядка t, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q(x_i) \tag{14}$$

для любого однородного полинома степени t.

Однородный полином степени t можно представить формулой $Q(x) = \sum_{|k|=t} a_k x^k$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S^{n-1}$ — полудизайн порядка t. Тогда выполнено тождество (13). Имеем

$$S(x) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle x_i,\, x\rangle^t = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^k \right) x^k.$$

Положим $s = t/2$. Тогда правая часть (13) записывается в виде

$$R(x) := c_t \|x\|^t = c_t \sum_{|l|=s} \frac{s!}{l!} x^{2l}.$$

Поскольку $S(x) \equiv R(x)$, то коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ и хоть одно k_j нечётно. Тогда

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^k = 0. \tag{15}$$

Пусть все k_j чётные, $k_j = 2l_j$. Тогда $k = 2l$ и

$$\frac{t!}{k!}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^k\right) = c_t \frac{s!}{l!}. \tag{16}$$

Достаточно проверить равенство (14) для $Q(x) = x^k$, $|k| = t$. Если хоть одно k_j нечётно, то в силу (15) имеем

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} x^k\,dS = 0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^k.$$

Пусть теперь $k = 2l$, где $|l| = s$. Тогда по лемме 3

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} x^k\,dS = \frac{(k_1-1)!!\cdots(k_n-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}.$$

В силу (16) в правой части (14) получаем сумму

$$T(k) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^k = \frac{k!}{t!}c_t\frac{s!}{l!} = \frac{k!}{t!}\frac{s!}{l!}\frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}.$$

Проведя совершенно элементарные выкладки, получим, что $I(k) = T(k)$. Значит, для $Q(x) = x^k$ выполняется (14).
Достаточность. Доказывается рассуждениями в "обратном порядке". □

Из теорем 2 и 3 вытекает теорема, которую впервые доказали Гётальс, Зайдель [4]. Это частный случай неравенства Сидельникова, но впервые указаны условия достижения равенства.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой последовательности* $U = \{x_i\}_{i=1}^m$ *точек сферы справедливо неравенство* (12). *Равенство достигается тогда и только тогда, когда выполнено условие* (14) *для любого однородного полинома* $Q(x)$ *степени* t.

Ввиду теоремы 3 опять приходим к выводу, что неравенство (12) обращается в равенство на сферических полудизайнах и только на них.

Дополнительные сведения о полудизайнах можно найти в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидельников В. М., *Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n-мерном эвклидовом пространстве* // Матем. сб. 1974. Т. 95(135). № 1(9). С. 148–158.

2. Casazza P. G. *Custom building finite frames* // Wavelets, Frames and Operator Theory. Contemp. Math. V. 345. Providence, RI, 2004. P. 68–86.

3. Котелина Н. О., Певный А. Б. *Экстремальные свойства сферических полудизайнов*// Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 162–170.

4. Goethals J. M., Seidel J. J. *Spherical designs* // Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 1979. V. 34. P. 255–272.

5. Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. No. 463. 155 pp.

6. Venkov B. *Réseaux et designs sphériques*// Réseaux Euclidiens, Designs Sphériques et Formes Modulaires. Monogr. Enseign. Math. Genève. 2001. V. 37. P. 10–86.

7. Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J., *Spherical codes and designs* // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. No. 3. P. 363–388.

8. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Интегрирование по сфере в n-мерном пространстве* // Семинар «DHA&CAGD». Избранные доклады. 15 мая 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0515`)

9. Афонин Р. Е., Малозёмов В. Н. *Вычисление интеграла Гильберта-Сонина* // Семинар «DHA&CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0904`)