СПЛАЙН-СГЛАЖИВАНИЕ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДАННЫХ*

А. Н. Сабаев

28 ноября 2009 г.

1°. Пусть m, n, r — натуральные числа, причём m и n отличны от единицы. Положим $N = mn$ и рассмотрим задачу сглаживания дискретных периодических данных в следующей постановке:

$$F(x) := \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r x(j)\bigr|^2 + \sum_{l=0}^{m-1} \bigl|x(ln) - z(l)\bigr|^2 \to \min_{x \in \mathbb{C}_N}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha > 0$ — фиксированный параметр. Известно ([1], см. также [2, с. 26–30]), что единственным решением этой задачи является дискретный периодический сплайн порядка r

$$S(j) = d + \sum_{l=0}^{m-1} d(l)\, b_{2r}(j + r - ln), \tag{2}$$

$$\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0, \tag{3}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$(-1)^r \alpha\, d(l) + S(ln) = z(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{4}$$

Решение системы линейных уравнений (4), (3) порядка $m+1$ можно записать явно:

$$\begin{gathered} d = \tfrac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} z(l), \\ d(l) = \tfrac{(-1)^r}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z(k)\, \omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}, \qquad l \in 0 : m-1, \end{gathered} \tag{5}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

где $Z=\mathcal{F}_m(z)$ и

$$\Lambda_r(k)=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\Bigl(2\sin\tfrac{\pi(qm+k)}{N}\Bigr)^{-2r}.$$

Отметим, что условие (3) входит в определение сплайна.

2°. Возьмём индексное множество J, содержащееся в $0:m-1$, и обобщим задачу (1) следующим образом:

$$F(x):=\alpha\sum_{j=0}^{N-1}\bigl|\Delta^r x(j)\bigr|^2+\sum_{l\in J}\bigl|x(ln)-z(l)\bigr|^2\to\min_{x\in\mathbb{C}_N}. \tag{6}$$

В частности, при $J=\{0,1,\ldots,m-2\}$ получаем задачу сглаживающей экстраполяции на один отсчёт. Если $x_*\in\mathbb{C}_N$ — решение такой задачи, то можно приближённо положить $z(m-1)=x_*((m-1)n)$.

Обозначим $J'=(0:m-1)\setminus J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Единственным решением задачи* (6) *является дискретный периодический сплайн* $S(j)$ *порядка* r, *имеющий вид* (2), (3), *коэффициенты которого удовлетворяют условиям*

$$(-1)^r\alpha\,d(l)+S(ln)=z(l),\quad l\in J; \tag{7}$$

$$d(l)=0,\quad l\in J'. \tag{8}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае регулярных данных. Сначала проверим, что у системы линейных уравнений (7), (8), (3) относительно коэффициентов сплайна $d,d(0),d(1),\ldots,d(m-1)$ решение существует и единственно. Для этого достаточно установить, что однородная система

$$\begin{gathered}(-1)^r\alpha\,d(l)+S(ln)=0,\quad l\in J;\\ d(l)=0,\quad l\in J';\\ \sum_{l\in J}d(l)=0\end{gathered} \tag{9}$$

имеет только нулевое решение.

Возьмём любое решение $d_0,d_0(0),d_0(1),\ldots,d_0(m-1)$ этой системы. Соответствующий сплайн обозначим $S_0(j)$. Воспользуемся известным свойством дискретного периодического сплайна [2, с. 20]

$$\sum_{j=0}^{N-1}\bigl|\Delta^r S_0(j)\bigr|^2=(-1)^r\sum_{l=0}^{m-1}d_0(l)\,\overline{S}_0(ln).$$

Получим

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r S_0(j)\bigr|^2 = (-1)^r \sum_{l\in J} d_0(l)\,\overline{S}_0(ln) =$$
$$= -\alpha \sum_{l\in J} \bigl|d_0(l)\bigr|^2 \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $d_0(l) = 0$ при всех $l \in J$, так что $S_0(j) \equiv d_0$. Коэффициент d_0 также равен нулю, поскольку $S_0(ln) = 0$ при $l \in J$.

Установлено, что однородная система (9) имеет только нулевое решение. Это гарантирует существование и единственность решения системы (7), (8), (3). Соответствующий сплайн обозначим $S_*(j)$. Покажем, что он является единственным решением задачи (6).

Введём обозначения

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r x(j)\bigr|^2, \qquad g(x) = \sum_{l\in J} \bigl|x(ln) - z(l)\bigr|^2.$$

Возьмём произвольный сигнал $H(j)$ из $\mathbb{C}_N$ и запишем

$$F(S_* + H) = \alpha\, f(S_* + H) + g(S_* + H) = \alpha\bigl[f(S_*) + f(H) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\, \Delta^r \overline{H}(j)\bigr] + g(S_*) + \sum_{l\in J} \bigl|H(ln)\bigr|^2 +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{l\in J} \bigl(S_*(ln) - z(l)\bigr)\, \overline{H}(ln).$$

Воспользуемся тем, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j)\, \Delta^r \overline{H}(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d_*(l)\, \overline{H}(ln).$$

Получим

$$F(S_* + H) = F(S_*) + \alpha\, f(H) + \sum_{l\in J} \bigl|H(ln)\bigr|^2 +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\Bigl\{ \sum_{l\in J} \bigl[(-1)^r \alpha\, d_*(l) + S_*(ln) - z(l)\bigr]\, \overline{H}(ln) + (-1)^r \alpha \sum_{l\in J'} d_*(l)\, \overline{H}(ln) \Bigr\}.$$

В силу (7) и (8)

$$F(S_* + H) = F(S_*) + \alpha\, f(H) + \sum_{l\in J} \bigl|H(ln)\bigr|^2. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$F(S_* + H) \geqslant F(S_*) \qquad \forall\, H \in \mathbb{C}_N\,.$$

Оптимальность S_* установлена. Проверим единственность решения.

Допустим, что $F(S_* + H) = F(S_*)$ при некотором $H \in \mathbb{C}_N$. Тогда согласно (10)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \bigl|\Delta^r H(j)\bigr|^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{l\in J} \bigl|H(ln)\bigr|^2 = 0.$$

Первое равенство гарантирует, что $H(j) \equiv \mathrm{const}$ (см. [2, с. 7]), второе приводит к тождеству $H(j) \equiv 0$.

Предложение доказано. □

Таким образом, задача (6) сглаживания нерегулярных данных $\{z(l)\}_{l\in J}$ сведена к решению системы линейных уравнений

$$\begin{gathered} (-1)^r \alpha\, d(l) + S(ln) = z(l), \quad l \in J; \\ d(l) = 0, \quad l \in J'; \\ \sum_{l\in J} d(l) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

причём известно, что эта система имеет решение и оно единственно.

3°. Покажем, что решение системы (11) можно выразить через $z'(l) = S_*(ln)$, $l \in J'$. Для этого введём два m-периодических сигнала

$$z_0(l) = \begin{cases} z(l) & \text{при } l \in J; \\ 0 & \text{при } l \in J'; \end{cases} \qquad z_0'(l) = \begin{cases} 0 & \text{при } l \in J; \\ z'(l) & \text{при } l \in J'. \end{cases}$$

Коэффициенты $d_*, d_*(0), d_*(1), \ldots, d_*(m-1)$ сплайна $S_*(j)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} (-1)^r \alpha\, d_*(l) + S_*(ln) = z_0(l) + z_0'(l), \qquad l \in 0 : m-1; \\ \sum_{l=0}^{m-1} d_*(l) = 0. \end{gathered}$$

Как отмечалось в п. 1°, отсюда следует, что

$$d_* = \tfrac{1}{m}\Bigl(\sum_{l\in J} z(l) + \sum_{l\in J'} z'(l)\Bigr), \tag{12}$$

$$d_*(l) = \tfrac{(-1)^r}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k) + Z_0'(k)}{\alpha + \Lambda_r(k)}\, \omega_m^{kl}\,, \qquad l \in 0 : m-1, \tag{13}$$

где $Z_0 = \mathcal{F}_m(z_0)$, $Z_0' = \mathcal{F}_m(z_0')$. Требуемые формулы получены.

Выведем систему линейных уравнений для $z'(l)$, $l \in J'$. Условие $d_*(l) = 0$ при $l \in J'$ в силу (13) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0'(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)} = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,, \qquad l \in J'. \tag{14}$$

Имеем

$$Z_0'(k) = \sum_{s=0}^{m-1} z_0'(s)\,\omega_m^{-ks} = \sum_{s \in J'} z'(s)\,\omega_m^{-ks}\,,$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0'(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)} = \sum_{s \in J'} z'(s) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\omega_m^{k(l-s)}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,.$$

Обозначим

$$\eta(l) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,, \qquad w(l) = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k)\,\omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,.$$

Тогда (14) можно переписать так:

$$\sum_{s \in J'} z'(s)\,\eta(l-s) = w(l)\,, \qquad l \in J'. \tag{15}$$

Это и есть требуемая система линейных уравнений относительно $z'(s)$, $s \in J'$. После её решения коэффициенты сглаживающего сплайна $S_*(j)$ вычисляются по формулам (12), (13).

Отметим, что при $|J'| < |J|$ порядок системы (15) меньше, чем порядок системы (11).

4°. Обратимся к задаче сглаживающей экстраполяции на один отсчёт, когда $J = 0 : m-2$, $J' = \{m-1\}$. В этом случае система (15) примет вид

$$z'(m-1)\,\eta(0) = w(m-1),$$

где

$$\eta(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,, \qquad w(m-1) = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z_0(k)\,\omega_m^{-k}}{\alpha + \Lambda_r(k)}\,,$$

$Z_0 = \mathcal{F}_m(z_0)$ и

$$z_0(l) = \begin{cases} z(l) & \text{при } l \in 0 : m-2; \\ 0 & \text{при } l = m-1. \end{cases}$$

Величина
$$z'(m-1)=\frac{w(m-1)}{\eta(0)}$$
есть предсказываемое значение исходных данных $\{z_l\}_{l=0}^{m-2}$ на индексе $l=m-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. №8. С. 1235–1246.

2. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа.* Часть третья. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 88 с.