ФРЕЙМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА*

Н. А. Соловьёва
vinyo@mail.ru

11 апреля 2009 г.

1°. Представляется естественным начинать изложение теории фреймов в $\mathbb{C}^n$ со следующего определения:

Векторы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ образуют фрейм, если их линейная оболочка совпадает с $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{L}\big(\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}\big) = \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда эрмитова матрица $S = \Phi\Phi^*$ положительно определена.*

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$\langle \Phi\Phi^* x, x\rangle = \big\|\Phi^* x\big\|^2. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что матрица S неотрицательно определена. Проверим, что при выполнении условия (1) она положительно определена.

Пусть $\langle Sx_0, x_0\rangle = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Согласно (2), $\Phi^* x_0 = 0$, то есть $\langle x_0, \varphi_k\rangle = 0$ при всех $k \in 0 : m-1$. В силу (1) существует разложение

$$x_0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\, \varphi_k\,.$$

Умножим его скалярно на x_0. Получим

$$\big\|x_0\big\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k \langle x_0, \varphi_k\rangle = 0\,.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

Значит, $x_0 = 0$. Положительная определённость матрицы S установлена.

Наоборот, предположим, что матрица S положительно определена, и покажем, что выполняется соотношение (1).

Известно, что у эрмитовой положительно определённой матрицы существует обратная матрица, которая также является эрмитовой и положительно определённой. Введём векторы

$$\psi_k = S^{-1}\,\varphi_k\,, \qquad k \in 0 : m-1\,,$$

и обозначим через Ψ матрицу со столбцами $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$. Имеем $\Psi = S^{-1}\,\Phi$. Как следствие, $\Psi\,\Phi^* = I_n$. Переходя к сопряжённым матрицам, получаем

$$\Phi\,\Psi^* = I_n\,.$$

Умножим обе части последнего равенства на произвольный вектор $x \in \mathbb{C}^n$. Придём к разложению

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} \langle x, \psi_k\rangle\,\varphi_k\,,$$

которое гарантирует выполнение условия (1). $\square$

Предложение 1 можно переформулировать в эквивалентном виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений*

$$\langle x, \varphi_k\rangle = 0\,, \qquad k \in 0 : m-1\,,$$

имеет только нулевое решение.

Доказательство очевидным образом следует из предложения 1 и формулы (2).

2°. Пусть U — унитарная матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и соответствующими ортонормированными собственными векторами $p_1, \ldots, p_n$. Возьмём единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим при $m \geqslant n$ систему векторов

$$\bigl\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\bigr\}\,. \tag{3}$$

Нас интересует вопрос, когда эта система будет фреймом.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система (3) была фреймом в $\mathbb{C}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(α) *собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы U попарно различны;*

(β) $\bigl|\langle\varphi_0, p_j\rangle\bigr| \neq 0$ *при всех $j \in 1 : n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наряду с векторами $\varphi_k = U^k\varphi_0$ рассмотрим векторы $g_k = P^*\varphi_k$, где P^* — сопряжённая матрица к унитарной матрице P, составленной из столбцов $p_1, \ldots, p_n$. Обозначим через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ соответственно. Имеем $G = P^*\Phi$ и

$$\langle GG^*x, x\rangle = \langle P^*\Phi\Phi^*Px, x\rangle = \langle \Phi\Phi^*y, y\rangle\,,$$

где $y = Px$. Отсюда и из предложения 1 следует, что система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ будет фреймом тогда и только тогда, когда фрейм образуют векторы $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$.

Воспользуемся спектральным разложением матрицы U:

$$U = P\,\Lambda\,P^*,$$

где Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Получим

$$g_k = P^*U^k\varphi_0 = P^*P\,\Lambda^kP^*\varphi_0 = \Lambda^k\big(P^*\varphi_0\big)\,. \tag{4}$$

Обозначим $b = P^*\varphi_0$. Это вектор с координатами $b(j) = \langle\varphi_0, p_j\rangle$, $j \in 1:n$. Координаты вектора g_k имеют вид

$$g_k(j) = \lambda_j^k\,b(j)\,, \qquad j \in 1:n\,, \quad k \in 0:m-1\,. \tag{5}$$

Нужно доказать, что векторы (5) образуют фрейм в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (α) и (β).

Будем опираться на предложение 2. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений $\langle x, g_k\rangle = 0$, $k \in 0:m-1$, которую в силу (5) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\,b(j)\,\bar{x}(j) = 0\,, \qquad k \in 0:m-1\,. \tag{6}$$

Если система (6) имеет только нулевое решение, то условия (α) и (β) выполняются. Действительно, пусть $b(j_0) = 0$ при некотором $j_0 \in 1:n$. Тогда у (6) появляется ненулевое решение — единичный орт $x = e_{j_0}$. Значит, $b(j) \neq 0$ при всех $j \in 1:n$, что равносильно условию (β). В случае $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$ у (6) также появляется ненулевое решение

$$\bar{x}(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j_1\,; \\ -b(j_1)/b(j_2) & \text{при } j = j_2\,; \\ 0 & \text{при остальных } j \in 1:n\,. \end{cases}$$

Значит, собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы U попарно различны. Это составляет содержание условия (α).

Наоборот, пусть выполнены условия (α) и (β). Возьмём решение x_0 системы (6) и покажем, что $x_0 = \mathbb{O}$. Этим будет завершено доказательство теоремы.

Вектор x_0 удовлетворяет укороченной системе уравнений с квадратной матрицей:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \, b(j) \, \bar{x}_0(j) = 0 \,, \qquad k \in 0 : n-1 \,. \tag{7}$$

Матрица D системы (7) допускает разложение

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \, b(1) & \ldots & \lambda_n^0 \, b(n) \\ \lambda_1^1 \, b(1) & \ldots & \lambda_n^1 \, b(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} \, b(1) & \ldots & \lambda_n^{n-1} \, b(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \ldots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \ldots & \lambda_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b(2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b(n) \end{bmatrix} .$$

Первый сомножитель в правой части этого разложения есть матрица Вандермонда. Она невырождена в силу условия (α). Второй сомножитель невырожден в силу условия (β). Значит, матрица D невырождена, поэтому сама система (7) имеет только нулевое решение.

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что условия (α) и (β) не зависят от m.