СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТНОЕ СЖАТИЕ НА ОТРЕЗКЕ*

А. А. Макаров
Antony.Makarov@gmail.com

12 ноября 2011 г.

В работе изучается вейвлетное сжатие сплайновых пространств лагранжева типа первого порядка на отрезке (с конечной неравномерной сеткой). Выведены соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции.

1. Сплайны, матрицы реконструкции и декомпозиции

На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha = \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$, $\beta = \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ не исключаются).

Будем рассматривать класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности*

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0 \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z},\ K_0 \geqslant 1,\ K_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Упорядоченное множество $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$ будем называть *цепочкой векторов*. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются цифрами; например, $\mathbf{a}_j = ([\mathbf{a}_j]_0, [\mathbf{a}_j]_1)^T$. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Введём обозначения $M = \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j, x_{j+1})$, $S_j = [x_j, x_{j+2}]$, $J_k = \{k-1, k\}$, где $k, j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^2$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Если цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}$ полная, то из условий

$$\begin{gathered}\sum_{j'\in J_k}\mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t)\equiv\boldsymbol{\varphi}(t)\quad\forall\,t\in(x_k,x_{k+1}),\ \forall\,k\in\mathbb{Z},\\ \omega_j(t)\equiv 0\qquad\forall\,t\notin S_j\cap M,\end{gathered}\tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t\in M$, $j\in\mathbb{Z}$. Ясно, что $\operatorname{supp}\omega_j(t)\subset\subset S_j$. По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (2) находим

$$\omega_j(t)=\begin{cases}\dfrac{\det(\mathbf{a}_{j-1},\boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j)} & \text{при } t\in[x_j,x_{j+1}),\\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1})} & \text{при } t\in[x_{j+1},x_{j+2}).\end{cases}$$

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$, $j\in\mathbb{Z}$, называется *пространством минимальных* $(\mathbf{A},\varphi)$*-сплайнов* первого порядка. Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями.*

Рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j\in\mathbb{R}^2$, задаваемые тождеством $\mathbf{d}_j^T\mathbf{x}\equiv\det(\boldsymbol{\varphi}_j,\,\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$, $j\in\mathbb{Z}$ и определим векторы $\mathbf{a}_j^*\in\mathbb{R}^2$ формулой $\mathbf{a}_j^*=\boldsymbol{\varphi}_{j+1}$. Представим векторы $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{d}_j$ в покомпонентном виде

$$\mathbf{a}_j^*=\big([\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_0,[\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1\big)^T,\quad \mathbf{d}_j=\big(-[\boldsymbol{\varphi}_j]_1,[\boldsymbol{\varphi}_j]_0\big)^T.$$

Если $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{C}^1(\alpha,\beta)$ и $W(t):=|\det(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}')(t)|\geqslant const>0$ для всех $t\in(\alpha,\beta)$, то $\omega_j\in C(\alpha,\beta)$ и справедливы формулы [1]

$$\omega_j(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{d}_j^T\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T\mathbf{a}_j^*} & \text{при } t\in[x_j,x_{j+1}),\\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T\mathbf{a}_j^*} & \text{при } t\in[x_{j+1},x_{j+2}).\end{cases}\tag{3}$$

Пространство

$$\mathbb{S}(X)=\big\{u\mid u=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_j\,\omega_j\quad\forall\,c_j\in\mathbb{R}^1\big\}$$

называется *пространством минимальных* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнов первого порядка* на сетке X.

Если $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0\equiv 1$, то справедливо тождество

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\omega_j(t)\equiv 1\quad\forall\,t\in(\alpha,\beta),$$

при этом формулы (3) принимают вид

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{[\boldsymbol{\varphi}(t)]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_j]_1}{[\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_j]_1} & \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{[\boldsymbol{\varphi}_{j+2}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}(t)]_1}{[\boldsymbol{\varphi}_{j+2}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1} & \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

Более того, если функция $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_1$ строго монотонна на множестве M, то сплайны $\omega_j(t)$ положительны при всех $t \in (x_j, x_{j+2})$.

Рассмотрим некоторые варианты сплайнов. Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t^\lambda)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда вронскиан $W(t) = \lambda t^{\lambda-1}$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$ не содержащем 0. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Будем называть эти сплайны *степенны́ми $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами* и обозначать через $\omega^{pow}_{j,1}(t)$. Из формул (3) вытекает представление (см. рис. 1)

$$\omega^{pow}_{j,1}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^\lambda - x_j^\lambda}{x_{j+1}^\lambda - x_j^\lambda}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2}^\lambda - t^\lambda}{x_{j+2}^\lambda - x_{j+1}^\lambda}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

При $\lambda = 1$ вронскиан $W(t)$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$, на котором сплайны $\omega^{pow}_{j,1}(t)$ совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени, то есть с одномерными функциями Куранта.

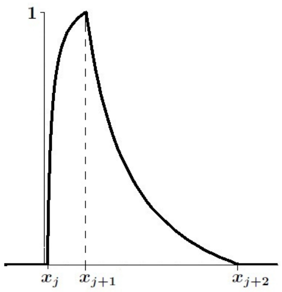

Рис. 1. Сплайн $\omega^{pow}_{j,1}$ при $\lambda = -1$.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \sin \lambda t)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда вронскиан $W(t) = \lambda \cos \lambda t$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$ не содержащем точек $\frac{\pi}{2\lambda} + \frac{\pi}{\lambda}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Будем называть эти сплайны *тригонометрическими $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами* и обозначать через $\omega^{trig}_{j,1}(t)$. Из формул (3) вытекает представление (см. рис. 2)

$$\omega_{j,1}^{trig}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\lambda t - \sin\lambda x_j}{\sin\lambda x_{j+1} - \sin\lambda x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\sin\lambda x_{j+2} - \sin\lambda t}{\sin\lambda x_{j+2} - \sin\lambda x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, \cos t)^T$ сплайны $\omega_j(t)$ совпадают с $NUAT$-B-сплайнами [2]. При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2})^T$ сплайны $\omega_j(t)$ рассмотрены в работе [3].

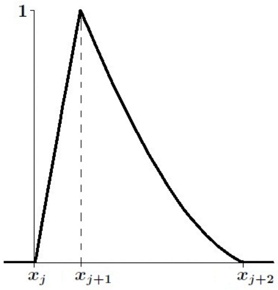

Рис. 2. Сплайн $\omega_{j,1}^{trig}$ при $\lambda = 1$.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \operatorname{sh}\lambda t)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда вронскиан $W(t) = \lambda \operatorname{ch}\lambda t$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Будем называть эти сплайны *гиперболическими $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнами* и обозначать через $\omega_{j,1}^{hyp}(t)$. Из формул (3) вытекает представление (см. рис. 3)

$$\omega_{j,1}^{hyp}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\lambda t - \operatorname{sh}\lambda x_j}{\operatorname{sh}\lambda x_{j+1} - \operatorname{sh}\lambda x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\operatorname{sh}\lambda x_{j+2} - \operatorname{sh}\lambda t}{\operatorname{sh}\lambda x_{j+2} - \operatorname{sh}\lambda x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

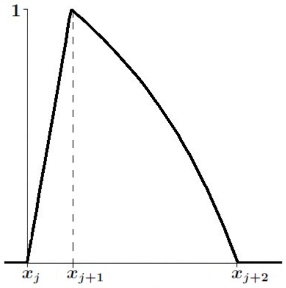

Рис. 3. Сплайн $\omega_{j,1}^{hyp}$ при $\lambda = 1$.

Рассмотрим конечномерные пространства сплайнов. Введём обозначения

$$a = x_0, \quad b = x_n, \quad J_{1,n} = \{-1, 0, \ldots, n-1, n\}.$$

Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку $X_n, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$X_n : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1},$$

из полной бесконечной цепочки $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$ выделим конечную цепочку $\mathbf{A}_n^* = \{\mathbf{a}_{-1}^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$.

Для измеримого (по Лебегу) множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^1$ обозначим через $\operatorname{mes}(\mathcal{M})$ его лебегову меру. Пусть система $\{g_j\}$ состоит из функций $g_j(t)$, заданных почти везде на интервале (α, β), и $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Система функций $\{g_j \mid \operatorname{mes}(\operatorname{supp} g_j \cap (a, b)) > 0\}$ называется *сужением* системы $\{g_j\}$ на отрезок $[a, b]$.

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X)$ на отрезок $[a, b]$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}(X_n) = \{u \mid u = \sum_{j\in J_{1,n-1}} c_j\, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\} \subset C[a, b].$$

Из исходной сетки X при фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ удалим один узел x_{k+1}, и на полученной таким образом *разреженной сетке* $\widetilde{X}$ рассмотрим сплайны $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\xi = x_{k+1}$, а $\widetilde{x}_j$ — узлы вновь полученной сетки $\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\widetilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{при } j \leqslant k, \\ x_{j+1} & \text{при } j \geqslant k+1. \end{cases} \tag{4}$$

Условимся ставить волну сверху над обозначениями всех ранее введённых объектов, определяемых новой сеткой $\widetilde{X}$. Функции $\widetilde{\omega}_j(t)$ можно построить по формуле (3), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\widetilde{x}_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [4])**.** *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_i(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \omega_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

где элементы $\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}$ задаются равенствами

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \textit{при } i \leqslant k-2,\, \forall j, \\ \delta_{k-1,j} & \textit{при } i = k-1,\, j \neq k, \\ \delta_{k+1,j} & \textit{при } i = k,\, j \neq k, \\ \delta_{i,j-1} & \textit{при } i \geqslant k+1,\, \forall j, \end{cases} \tag{6}$$

а также формулами

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \frac{1}{\mathbf{d}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*} \left(\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* - \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^* \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*} \right), \tag{7}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*}. \tag{8}$$

Предполагая, что $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки X_n; в результате получим разреженную сетку

$$\widetilde{X}_n : \quad \widetilde{x}_{-1} < a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_{n-1} = b < \widetilde{x}_n,$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i = -1, \dots, n$, по-прежнему определяются формулами (4).

Введём конечномерные вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) = \big(\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \dots, \omega_{n-1}(t)\big)^T,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) = \big(\widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \dots, \widetilde{\omega}_{n-2}(t)\big)^T.$$

Ввиду равенства (5) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $t \in [a, b]$ могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}_n \, \boldsymbol{\omega}_{(n)}(t), \tag{9}$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ — прямоугольная числовая матрица размера $n \times (n+1)$. Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей разрежающей реконструкции* на отрезке $[a, b]$, и имеет следующий вид

$$\widetilde{\mathfrak{P}}_n = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} -1 & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} -1 \\ \dots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \dots \\ n-2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$.

Рассмотрим линейные функционалы $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, заданные на пространстве $C(\alpha,\beta)$ формулой

$$\langle f_j, u\rangle = u(x_{j+1}), \quad u \in C(\alpha,\beta),\, j\in\mathbb{Z}. \tag{10}$$

Ясно, что система линейных функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, то есть

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad \forall j, j' \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где $\delta_{j,j'}$ — символ Кронекера.

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, биортогональную системе функций $\{\widetilde{\omega}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$. Пусть $\mathfrak{q}_{j,j'} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'}\rangle$ $\forall j, j' \in \mathbb{Z}$. Тогда (см. [4]) для $j, j', k \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \begin{cases} \delta_{j,j'} & \text{при } j' \leqslant k-1, \\ 0 & \text{при } j' = k, \\ \delta_{j,j'-1} & \text{при } j' \geqslant k+1. \end{cases} \tag{12}$$

Выделим из множества функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+1$ функционала, из множества функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из n функционалов. Для систем функционалов $\{f_j\}_{j\in J_{1,n-1}}$, $\{\widetilde{f}_i\}_{i\in J_{1,n-2}}$ справедливы равенства

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad j, j' \in J_{1,n-1}, \quad \langle \widetilde{f}_i, \widetilde{\omega}_{i'}\rangle = \delta_{i,i'}, \quad i, i' \in J_{1,n-2},$$

причём $\operatorname{supp} f_j \subset [a,b]$, $\operatorname{supp} \widetilde{f}_i \subset [a,b]$.

Прямоугольная матрица $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n = (\mathfrak{q}_{i,j})$, $i \in J_{1,n-2}$, $j \in J_{1,n-1}$, размера $n \times (n+1)$ называется *матрицей разрежающей декомпозиции* на отрезке $[a,b]$, и имеет следующий вид

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n = \begin{array}{c} \\ -1 \\ \dots \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \dots \\ n-2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -1 & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Для матриц $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ и $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n$ справедливо соотношение

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n \, \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T = I_n, \tag{13}$$

где I_n — единичная квадратная матрица порядка n.

2. Сплайн-вейвлетное сжатие на отрезке

Согласно калибровочным соотношениям (9) справедливо включение пространств

$$\mathbb{S}(\widetilde{X}_n) \subset \mathbb{S}(X_n).$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{P}_n$ проектирования пространства $\mathbb{S}(X_n)$ на подпространство $\mathbb{S}(\widetilde{X}_n)$, задаваемый формулой

$$\widetilde{P}_n \, u = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i \, \widetilde{\omega}_i, \quad \text{где } \widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u \rangle \quad \forall \, u \in \mathbb{S}(X_n),$$

и введём оператор $\widetilde{Q}_n = I - \widetilde{P}_n$, где I — тождественный в $\mathbb{S}(X_n)$ оператор.

Пространство $\widetilde{W}_n = \widetilde{Q}_n \, \mathbb{S}(X_n)$ называется *пространством вейвлетов* в конечномерном случае, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(X_n) = \mathbb{S}(\widetilde{X}_n) \dotplus \widetilde{W}_n, \tag{14}$$

порождает *сплайн-вейвлетное сжатие* пространства $\mathbb{S}(X_n)$.

В соответствии с равенством (14) для $u \in \mathbb{S}(X_n)$ имеем

$$u = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i \, \widetilde{\omega}_i + \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \widetilde{b}_{i'} \, \omega_{i'} = \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \left(\sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i \, \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,i'} + \widetilde{b}_{i'} \right) \omega_{i'},$$

так что для чисел $\widetilde{c}_j = \langle f_j, u \rangle$ получаем

$$\widetilde{c}_j = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i \, \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + \widetilde{b}_j \quad \forall \, j \in J_{1,n-1}. \tag{15}$$

Пусть известны коэффициенты $\widetilde{c}_{i'}$ в разложении элемента $u \in \mathbb{S}(X)$ по элементам базиса $\omega_{i'}$, а именно,

$$u = \sum_{i' \in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'} \, \omega_{i'}.$$

Из соотношений (15) имеем

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \widetilde{a}_i \quad \forall\, j \in J_{1,n-1}.$$

Используя равенство $\widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u\rangle$, для всех $j \in J_{1,n-1}$ получаем

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \langle \widetilde{f}_i, \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \omega_{i'}\rangle =$$

$$= \widetilde{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'} \langle \widetilde{f}_i, \omega_{i'}\rangle = \widetilde{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'}. \tag{16}$$

Формулы

$$\widetilde{a}_i = \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \mathfrak{q}_{i,i'}\, \widetilde{c}_{i'} \quad \forall\, i \in J_{1,n-2}, \tag{17}$$

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \left(\sum_{i\in J_{1,n-2}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \mathfrak{q}_{i,i'} \right) \widetilde{c}_{i'} \quad \forall\, j \in J_{1,n-1}, \tag{18}$$

называются *формулами декомпозиции.*

ТЕОРЕМА 2. *Если* $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, *то для сплайн-вейвлетного разложения* (14) *формулы декомпозиции* (17)–(18) *при* $i \in J_{1,n-2}$, $j \in J_{1,n-1}$ *имеют вид*

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} \widetilde{c}_i & \text{при } i \leqslant k-1, \\ \widetilde{c}_{i+1} & \text{при } i \geqslant k, \end{cases} \tag{19}$$

$$\widetilde{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ \widetilde{c}_k - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \widetilde{c}_{k-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \widetilde{c}_{k+1} & \text{при } j = k. \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство. Подставляя равенства (12) в выражение (17), находим

$$\widetilde{a}_i = \sum_{i'\in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'} = \sum_{i'=-1}^{k-1} \widetilde{c}_{i'} \delta_{i,i'} + \sum_{i'=k+1}^{n-1} \widetilde{c}_{i'} \delta_{i,i'-1},$$

откуда вытекает формула (19).

Из соотношения (16), применяя равенство (12), выводим

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i=-1}^{k-1} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \widetilde{c}_i - \sum_{i=k}^{n-2} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \widetilde{c}_{i+1}.$$

Из формул (6)–(8) следует, что

$$\widetilde{b}_j = \widetilde{c}_j - \sum_{i=-1}^{k-2} \delta_{i,j}\, \widetilde{c}_i - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,j}\, \widetilde{c}_{k-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,j}\, \widetilde{c}_{k+1} - \sum_{i=k+1}^{n-2} \delta_{i,j-1}\, \widetilde{c}_{i+1}. \qquad (21)$$

При подстановке различных $j \neq k$ в равенство (21) получаем $\widetilde{b}_j = 0$. При $j = k$ имеем $\widetilde{b}_{k+1} = \widetilde{c}_k - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \widetilde{c}_{k-1} - \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \widetilde{c}_{k+1}$. Теорема доказана. $\square$

Согласно формуле (20) базисом вейвлетного пространства $\widetilde{W}_n$ служит сплайн ω_k, то есть $\widetilde{W}_n = \{\widetilde{b}_k\, \omega_k \mid \widetilde{b}_k \in \mathbb{R}^1\}$.

Пусть теперь известны коэффициенты $\widetilde{a}_i$, $i \in J_{1,n-2}$ и $\widetilde{b}_k$ в разложениях проекций элемента $u \in \mathbb{S}(X_n)$ на пространства $\mathbb{S}(\widetilde{X}_n)$ и $\widetilde{W}_n$:

$$\widetilde{P}_n u = \sum_{i \in J_{1,n-2}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\omega}_i, \qquad \widetilde{Q}_n u = \widetilde{b}_k\, \omega_k.$$

Найдём формулы для определения коэффициентов в представлении $u = \sum_{j \in J_{1,n-1}} \widetilde{c}_j\, \omega_j$. Такие формулы называются *формулами реконструкции.*

ТЕОРЕМА 3. *Если $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ и $i \in J_{1,n-1}$, то для сплайн-вейвлетного разложения* (14) *формулы реконструкции имеют вид*

$$\widetilde{c}_i = \begin{cases} \widetilde{a}_i & \textit{при } i \leqslant k-1, \\ \widetilde{b}_k + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \widetilde{a}_{k-1} + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \widetilde{a}_k & \textit{при } i = k, \\ \widetilde{a}_{i-1} & \textit{при } i \geqslant k+1. \end{cases}$$

Это следует непосредственно из равенств (19) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Макаров. *О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка* // Проблемы матем. анализа. Вып. 38. 2008. С. 47–60.

2. G. Wang, Q. Chen, M. Zhou. *NUAT-B-spline curves* // Computer Aided Geometric Design. 2004. Vol. 21, No 2. P. 193–205.

3. М. В. С. О. Габр. *Сплайн-вейвлетные разложения для тригонометрических сплайнов первого порядка* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 сентября 2010 г. (`http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0918`)

4. А. А. Макаров. *Матрицы реконструкции и декомпозиции для линейных сплайнов* // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 18. С. 215–236.