НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЖЁСТКИХ ФРЕЙМАХ*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

13 декабря 2008 г.

В докладе представлено содержание обзорной статьи [1].

1°. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ — фрейм в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\varPhi$ матрицу со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, а через S — матрицу фрейма, $S = \varPhi\varPhi^T$. По определению фрейма симметричная матрица S положительно определена. У S существует обратная матрица S^{-1}, которая также симметрична и положительно определена.

Введём векторы

$$\widetilde{\varphi}_k = S^{-1}\varphi_k\,, \qquad k \in 1 : m\,.$$

Матрица $\widetilde{\varPhi}$ со столбцами $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m$ обладает следующим свойством

$$\widetilde{\varPhi}\,\varPhi^T = I_n\,, \tag{1}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Поскольку

$$\widetilde{S} := \widetilde{\varPhi}\,\widetilde{\varPhi}^T = S^{-1}\varPhi\,\varPhi^T S^{-1} = S^{-1},$$

то система векторов $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m\}$ является фреймом. Он называется *каноническим двойственным фреймом*. Умножив (1) на произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^n$, придём к разложению

$$x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varphi_k\rangle\, \widetilde{\varphi}_k\,.$$

Это разложение используется при передаче информации. По каналам связи вместо сигнала x передаются коэффициенты $\langle x, \varphi_k\rangle$, $k \in 1 : m$. За счёт возникающих погрешностей на приёмник поступает сигнал

$$\widehat{x} = \sum_{k=1}^{m} \big[\langle x, \varphi_k\rangle + \eta_k\big]\widetilde{\varphi}_k\,.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Будем считать, что $\eta_1, \dots, \eta_m$ — независимые случайные величины со средним значением, равным нулю, и дисперсией σ^2. Ошибка

$$x - \widehat{x} = -\sum_{k=1}^{m} \eta_k \, \widetilde{\varphi}_k$$

обычно измеряется с помощью MSE (mean square error) по формуле

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\,\mathbf{E}\,\Big\| \sum_{k=1}^{m} \eta_k \, \widetilde{\varphi}_k \Big\|^2 = \frac{1}{n}\,\mathbf{E}\Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \eta_k \, \eta_s \langle \widetilde{\varphi}_k, \widetilde{\varphi}_s \rangle \Big] = \\ = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{k=1}^{m} \big\| \widetilde{\varphi}_k \big\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n > 0$ собственные числа матрицы фрейма S. Тогда собственными числами матрицы $\widetilde{S} = S^{-1}$ канонического двойственного фрейма будут $\lambda_1^{-1} \leqslant \lambda_2^{-1} \leqslant \dots \leqslant \lambda_n^{-1}$. След матрицы S связан с её собственными числами равенством

$$\mathrm{tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,.$$

Вместе с тем,

$$\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(\varPhi\,\varPhi^T) = \mathrm{tr}(\varPhi^T \varPhi) = \sum_{k=1}^{m} \big\| \varphi_k \big\|^2.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{m} \big\| \varphi_k \big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,. \tag{3}$$

По тем же причинам

$$\sum_{k=1}^{m} \big\| \widetilde{\varphi}_k \big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \,.$$

С помощью последнего равенства формула (2) для MSE приводится к виду

$$\mathrm{MSE} = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \,.$$

Поставим задачу: *среди всех равномерных фреймов* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, *у которых* $\|\varphi_k\| = a$, $k \in 1 : m$, *найти фрейм с наименьшим* MSE. С учётом (3) данная задача формализуется так:

$$\begin{gathered} \mathrm{MSE} := \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \to \min\,, \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = m\, a^2; \qquad \lambda_i > 0, \quad i \in 1 : n\,. \end{gathered} \tag{4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Задача* (4) *имеет единственное решение*

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = \cdots = \lambda_n^* = \frac{m}{n}\, a^2. \tag{5}$$

При этом для минимальной погрешности MSE* *справедлива формула*

$$\mathrm{MSE}^* = \frac{n\, \sigma^2}{m\, a^2}\,.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством между средним гармоническим и средним арифметическим положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\frac{n}{\lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_n^{-1}} \leqslant \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n}\,.$$

Оно обращается в равенство только тогда, когда $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

В силу ограничений задачи (4)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \geqslant \frac{n^2}{m\, a^2}\,,$$

причём неравенство обращается в равенство только тогда, когда выполняется условие (5). Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

Согласно предложению 1 наилучшим для передачи информации с точки зрения минимизации MSE будет жёсткий фрейм с матрицей фрейма $S = \lambda^* I_n$, где $\lambda^* = \frac{m}{n}\, a^2$. При $a = \sqrt{\frac{n}{m}}$ получаем равномерный фрейм Парсеваля ($S = I_n$). В этом случае $\mathrm{MSE}^* = \sigma^2$.

2°. Равномерные фреймы Парсеваля существуют. Действительно, возьмём жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ с единичными векторами φ_k. Он характеризуется тем, что любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ допускает представление

$$x = \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varphi_k \rangle\, \varphi_k\,.$$

Положим

$$\widehat{\varphi}_k = \sqrt{\tfrac{n}{m}}\,\varphi_k\,, \qquad k \in 1:m\,.$$

Тогда

$$x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, \widehat{\varphi}_k\rangle\, \widehat{\varphi}_k\,.$$

Это равенство характеризует систему векторов $\{\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_m\}$ как фрейм Парсеваля. Он равномерный, поскольку $\|\widehat{\varphi}_k\| = \sqrt{\tfrac{n}{m}}$ при всех $k \in 1:m$.

В частности, при любом $m \geqslant n$ равномерный фрейм Парсеваля образует (при соответствующей нормировке) вещественный гармонический фрейм (см., например, [2]).

3°. Между фреймами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ имеется связь.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливы утверждения:*

(α) *фрейм в $\mathbb{R}^n$ с границами A, B является фреймом в $\mathbb{C}^n$ с теми же границами;*

(β) *если $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ — фрейм в $\mathbb{C}^n$ с границами A, B, то $2m$ векторов $\big\{\{\operatorname{Re}\varphi_k\}_{k=1}^m, \{\operatorname{Im}\varphi_k\}_{k=1}^m\big\}$ образуют фрейм в $\mathbb{R}^n$ с теми же границами.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ — фрейм в $\mathbb{R}^n$ с границами A, B. Это значит, что при любом $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \big|\langle x, \varphi_k\rangle\big|^2 \leqslant B\,\|x\|^2. \tag{6}$$

Возьмём вектор $x = a + i\,b$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \big|x(j)\big|^2 = \sum_{j=1}^{n} \Big[\big|a(j)\big|^2 + \big|b(j)\big|^2\Big] = \|a\|^2 + \|b\|^2,$$

$$\big|\langle x, \varphi_k\rangle\big|^2 = \big|\langle a, \varphi_k\rangle + i\langle b, \varphi_k\rangle\big|^2 = \big|\langle a, \varphi_k\rangle\big|^2 + \big|\langle b, \varphi_k\rangle\big|^2.$$

Согласно (6) имеем

$$A\,\|a\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \big|\langle a, \varphi_k\rangle\big|^2 \leqslant B\,\|a\|^2,$$

$$A\,\|b\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \big|\langle b, \varphi_k\rangle\big|^2 \leqslant B\,\|b\|^2.$$

Сложив, придём к неравенствам

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \big|\langle x, \varphi_k\rangle\big|^2 \leqslant B\,\|x\|^2.$$

Значит, $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ — фрейм $\mathbb{C}^n$ с границами A, B.

Наоборот, пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ — фрейм в $\mathbb{C}^n$ с границами A, B. Принимая во внимание, что при $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle x, \varphi_k\rangle &= \sum_{j=1}^{n} x(j)\big[\operatorname{Re}\varphi_k(j) - i\,\operatorname{Im}\varphi_k(j)\big] = \\ &= \langle x, \operatorname{Re}\varphi_k\rangle - i\langle x, \operatorname{Im}\varphi_k\rangle, \\ \big|\langle x, \varphi_k\rangle\big|^2 &= \big|\langle x, \operatorname{Re}\varphi_k\rangle\big|^2 + \big|\langle x, \operatorname{Im}\varphi_k\rangle\big|^2,\end{aligned}$$

по определению фрейма в $\mathbb{C}^n$ получаем

$$A\,\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m}\Big[\big|\langle x, \operatorname{Re}\varphi_k\rangle\big|^2 + \big|\langle x, \operatorname{Im}\varphi_k\rangle\big|^2\Big] \leqslant B\,\|x\|^2.$$

Это соответствует утверждению (β). $\square$

4°. Приведём нетривиальный пример жёсткого фрейма в $\mathbb{R}^3$, состоящего из векторов единичной длины.

ПРИМЕР. Пусть

$$\varPhi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} & -\sqrt{\frac{5}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ столбцы матрицы $\varPhi$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \big|\langle x, \varphi_k\rangle\big|^2 = \Big(x_2\sqrt{\tfrac{1}{3}} + x_3\sqrt{\tfrac{2}{3}}\Big)^2 + \Big(-x_2\sqrt{\tfrac{1}{3}} + x_3\sqrt{\tfrac{2}{3}}\Big)^2 + x_2^2 +$$
$$+\Big(x_1\sqrt{\tfrac{5}{6}} + x_3\sqrt{\tfrac{1}{6}}\Big)^2 + \Big(-x_1\sqrt{\tfrac{5}{6}} + x_3\sqrt{\tfrac{1}{6}}\Big)^2 = \tfrac{5}{3}\Big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\Big) = \tfrac{5}{3}\,\|x\|^2.$$

Значит, единичные векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ образуют жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^3$.

5°. Можно дать полное описание жёстких фреймов в $\mathbb{R}^2$, состоящих из векторов единичной длины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Система единичных векторов*

$$\varphi_k = \big(\cos\alpha_k, \sin\alpha_k\big)\,, \qquad k \in 1:m\,,$$

образует жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{m} e^{2i\,\alpha_k} = 0\,. \tag{7}$$

Доказательство. В данном случае

$$\varPhi = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \dots & \cos\alpha_m \\ \sin\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_m \end{bmatrix}.$$

Условие $\varPhi\varPhi^T = \frac{m}{2}\,I_2$ принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2\alpha_k = \frac{m}{2}\,, \quad \sum_{k=1}^{m} \sin^2\alpha_k = \frac{m}{2}\,, \quad \sum_{k=1}^{m} \cos\alpha_k\,\sin\alpha_k = 0\,. \tag{8}$$

Это эквивалентно двум равенствам

$$\sum_{k=1}^{m} \cos 2\alpha_k = 0\,, \qquad \sum_{k=1}^{m} \sin 2\alpha_k = 0\,. \tag{9}$$

Действительно, импликация (8) ⇒ (9) очевидна. Наоборот, из (9) следует, что

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2\alpha_k = \sum_{k=1}^{m} \sin^2\alpha_k\,,$$

Учитывая формулу

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2\alpha_k = m - \sum_{k=1}^{m} \sin^2\alpha_k\,,$$

приходим к (8).

Остаётся отметить, что (7) представляет собой лишь другую форму записи соотношений (9). □

6°. Более полный обзор по конечномерным фреймам имеется в статье [3] и книге [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Драбкова Е. С., Новиков С. Я. *Объём фрейма Парсеваля* // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная серия. 2007. № 9/1(59). С. 91–106.

2. Дурягин А. М., Соловьёва Н. А. *Вещественные гармонические фреймы* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#1009`).

3. Goyal V. K., Kovačević J., Kelner J. A. *Quantized frame expansions with erasures* // Appl. Comput. Harmonic Anal. 2001. Vol. 10. No. 3. P. 203–233.

4. Christensen O. *An introduction to frames and Riesz bases.* Boston: Birkhäuser, 2002.