КРОНЕКЕРОВО УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ И КОММУТАТИВНОСТЬ*

В. Н. Малозёмов О. В. Просеков

malv@math.spbu.ru sc2@pisem.net

21 августа 2007 г.

1°. Пусть A_n и B_m — квадратные матрицы порядков n и m соответственно и I_n — единичная матрица порядка n. Имеет место следующее свойство коммутативности [1]:

$$\big(A_n \otimes I_m\big)\big(I_n \otimes B_m\big) = \big(I_n \otimes B_m\big)\big(A_n \otimes I_m\big). \tag{1}$$

В левой и правой частях равенства (1) стоят разные разложения матрицы $A_n \otimes B_m$.

В данном докладе приводится обобщение формулы (1), важное для теории быстрого преобразования Фурье.

2°. Зафиксируем натуральное число $N = n_1 n_2 \cdots n_s$, где n_ν — натуральные числа, отличные от единицы, и введём обозначения

$$\begin{gathered} N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s\,, \quad \nu \in 0 : s-1\,; \quad N_s = 1\,; \\ \Delta_1 = 1\,; \quad \Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1}\,, \quad \nu \in 2 : s+1\,. \end{gathered}$$

Очевидно, что $\Delta_\nu\, n_\nu\, N_\nu = N$ при всех $\nu \in 1 : s$.

Будем рассматривать только квадратные матрицы; нижний индекс указывает на их порядок.

ТЕОРЕМА. *Справедливо равенство*

$$\begin{gathered} \prod_{\nu=1}^{s} \big(A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\big) \prod_{\nu=1}^{s} \big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big) \prod_{\nu=1}^{s} \big(I_{N_\nu} \otimes C^{(\nu)}_{\Delta_{\nu+1}}\big) = \\ = \prod_{\nu=1}^{s} \big(A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes C^{(\nu)}_{\Delta_{\nu+1}}\big). \end{gathered} \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

3°. Предварительно установим три вспомогательных предложения.

ЛЕММА 1. *При* $\mu > \nu$

$$\big(A^{(\mu)}_{N_{\mu-1}} \otimes I_{\Delta_\mu}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big) = \big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(A^{(\mu)}_{N_{\mu-1}} \otimes I_{\Delta_\mu}\big). \qquad (3)$$

Доказательство. Поскольку $I_{\Delta_\mu} = I_{n_{\nu+1}\cdots n_{\mu-1}} \otimes I_{\Delta_{\nu+1}}$, то согласно (1)

$$\begin{gathered}\big(A^{(\mu)}_{N_{\mu-1}} \otimes I_{\Delta_\mu}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big) = \\ = \big((A^{(\mu)}_{N_{\mu-1}} \otimes I_{n_{\nu+1}\cdots n_{\mu-1}}) \otimes I_{\Delta_{\nu+1}}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes (B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu})\big) = \\ = \big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(A^{(\mu)}_{N_{\mu-1}} \otimes I_{\Delta_\mu}\big).\end{gathered}$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *При* $\mu < \nu$

$$\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big) = \big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big).$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $I_{N_\mu} = I_{N_{\nu-1}} \otimes I_{n_{\mu+1}\cdots n_{\nu-1}}$. Согласно (1) получим

$$\begin{gathered}\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big) = \\ = \big((I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu}) \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_{\nu-1}} \otimes (I_{n_{\mu+1}\cdots n_{\nu-1}} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}})\big) = \\ = \big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big).\end{gathered}$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 3. *При* $\mu < \nu$

$$\big(A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big) = \big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big)\big(A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\big).$$

Доказательство такое же, как в лемме 2. Матрица $I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu}$ заменена на $A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}}$.

Замечание. Обозначим

$$D^{(\nu)}_N = \big(A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\big(I_{N_\nu} \otimes B^{(\nu)}_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big).$$

Последовательное применение лемм 2 и 3 приводит к равенству

$$D^{(\nu)}_N \big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big) = \big(I_{N_\mu} \otimes C^{(\mu)}_{\Delta_{\mu+1}}\big) D^{(\nu)}_N \qquad \text{при } \mu < \nu\,. \qquad (4)$$

4°. Обратимся к доказательству теоремы. В качестве первого шага установим, что

$$\prod_{\nu=1}^{s}\bigl(A^{(\nu)}_{N_{\nu-1}}\otimes I_{\Delta_\nu}\bigr)\prod_{\nu=1}^{s}\bigl(I_{N_\nu}\otimes B^{(\nu)}_{n_\nu}\otimes I_{\Delta_\nu}\bigr)=\prod_{\nu=1}^{s}D^{(\nu)}_{N}\,. \tag{5}$$

Возьмём последний сомножитель в первом произведении из левой части равенства (5). С помощью последовательного применения формулы (3) переместим его на позицию перед последним сомножителем второго произведения. Получим матрицу $D_N^{(s)}$. Точно так же сомножитель с индексом $\nu = s-1$ первого произведения переместим на позицию перед сомножителем с индексом $\nu = s-1$ второго произведения. Получим матрицу $D_N^{(s-1)}$. Продолжив аналогично, придём к равенству (5). При этом первый сомножитель из первого произведения остаётся на месте.

Второй шаг сводится к проверке равенства

$$\prod_{\nu=1}^{s}D^{(\nu)}_{N}\prod_{\nu=1}^{s}\bigl(I_{N_\nu}\otimes C^{(\nu)}_{\Delta_{\nu+1}}\bigr)=\prod_{\nu=1}^{s}D^{(\nu)}_{N}\,\bigl(I_{N_\nu}\otimes C^{(\nu)}_{\Delta_{\nu+1}}\bigr). \tag{6}$$

С помощью последовательного применения формулы (4) первый сомножитель во втором произведении из левой части равенства (6) переместим на позицию после первого сомножителя в первом произведении; второй сомножитель из второго произведения переместим на позицию после второго сомножителя из первого произведения и т. д. В результате придём к равенству (6). При этом последний сомножитель из второго произведения остаётся на месте.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В. *Перестановки и кронекерово произведение матриц* // Секция «Дискретный гармонический анализ». Избранные доклады. 31 марта 2004 г. (`http://dha.spb.ru/reps04.shtml#0324`)