# ПРИМЕР ДВУМЕРНОГО АЛЬТЕРНАНСА*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

26 декабря 2013 г.

Пример двумерного альтернанса мы получим, анализируя один частный случай задачи о наилучшем равномерном приближении матрицы матрицами меньшего ранга [1].

**1°**. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число и $N = 1 : n$. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов $x = x[N]$ рассмотрим две нормы:

$$\|x\|_\infty = \max_{j \in N} \bigl|x[j]\bigr|,$$
$$\|x\|_1 = \sum_{j \in N} \bigl|x[j]\bigr|.$$

Ясно, что

$$\bigl|\langle x, y\rangle\bigr| = \Bigl|\sum_{j \in N} x[j] \times y[j]\Bigr| \leqslant \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1. \tag{1}$$

В линейном пространстве $\mathbb{M}^n$ квадратных матриц $A = A[N, N]$ порядка $n$ введём равномерную норму:

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in N} \max_{j \in N} \bigl|A[i, j]\bigr|.$$

В этом случае

$$\|uA\|_\infty = \max_{j \in N} \Bigl|\sum_{i \in N} u[i] \times A[i, j]\Bigr| \leqslant \|A\|_\infty \cdot \|u\|_1. \tag{2}$$

Вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ назовём *сигнум-вектором*, если

$$\bigl|\xi[j]\bigr| = 1 \quad \text{при всех} \quad j \in N.$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

С каждым ненулевым вектором $w \in \mathbb{R}^n$ свяжем его сигнум-вектор $\xi = \operatorname{sign}(w)$, компоненты которого определим так:

$$\xi[j] = \begin{cases} \operatorname{sign}\bigl(w[j]\bigr) & \text{при } w[j] \neq 0, \\ 1 & \text{при } w[j] = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\bigl\langle w,\ \operatorname{sign}(w)\bigr\rangle = \|w\|_1. \tag{3}$$

Наконец, обозначим через $\mathbb{M}^n_{n-1}$ множество матриц $Z \in \mathbb{M}^n$, ранг которых не превосходит $n-1$, то есть таких матриц $Z \in \mathbb{M}^n$, у которых столбцы (а следовательно, и строки) линейно зависимы.

**2**°. Зафиксируем невырожденную матрицу $F \in \mathbb{M}^n$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\|F - Z\|_\infty \to \min_{Z \in \mathbb{M}^n_{n-1}}. \tag{4}$$

В работе [1] указано явное решение этой задачи. Чтобы построить его, возьмём сигнум-вектор $\xi_*$, на котором достигается максимум $\|F^{-1}\xi\|_1$, по всем сигнум-векторам $\xi$, так что

$$\|F^{-1}\xi_*\|_1 = \max_\xi \|F^{-1}\xi\|_1.$$

Обозначим

$$w_* = F^{-1}\xi_*, \quad a_* = \|w_*\|_1, \quad \eta_* = \operatorname{sign}(w_*).$$

Определение $\eta_*$ корректно, поскольку $w_*$ ненулевой вектор. При этом $a_* > 0$.

**ТЕОРЕМА** (В. А. Даугавет и Л. В. Сазонова [1]). *Матрица*

$$Z_* = F - \frac{1}{a_*}\xi_*\eta_*^T \tag{5}$$

*является решением задачи* (4).

Мы дадим усовершенствованный вариант доказательства этой теоремы.

Пусть $Z$ — произвольная матрица из $\mathbb{M}^n_{n-1}$. Её строки линейно зависимы, поэтому найдётся ненулевой вектор $w$, такой, что

$$wZ = \mathbb{O}. \tag{6}$$

Можно считать, что $\|w\|_1 = 1$. Обозначим $\xi = \operatorname{sign}(w)$. Согласно (3), (1) и определению $a_*$ имеем

$$1 = \langle w, \xi\rangle = \langle wF,\ F^{-1}\xi\rangle \leqslant \|wF\|_\infty \cdot \|F^{-1}\xi\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \|wF\|_\infty \cdot \max_\xi \|F^{-1}\xi\|_1 = a_*\|wF\|_\infty.$$

В силу (6) и (2)

$$\|wF\|_\infty = \big\|w(F-Z)\big\|_\infty \leqslant \|F-Z\|_\infty \cdot \|w\|_1 = \|F-Z\|_\infty,$$

поэтому

$$1 \leqslant a_* \|F-Z\|_\infty.$$

Приходим к неравенству

$$\|F-Z\|_\infty \geqslant \frac{1}{a_*} \quad \forall Z \in \mathbb{M}^n_{n-1}. \tag{7}$$

Обратимся к матрице $Z_*$ вида (5). Для неё

$$F - Z_* = \frac{1}{a_*}\,\xi_*\,\eta_*^T. \tag{8}$$

Все элементы одноранговой матрицы $\xi_*\,\eta_*^T$ равны $+1$ или $-1$, поэтому

$$\|F-Z_*\|_\infty = \frac{1}{a_*}. \tag{9}$$

Покажем, что $Z_* \in \mathbb{M}^n_{n-1}$. Отсюда и из (7), (9) будет следовать заключение теоремы.

Достаточно проверить, что столбцы матрицы $Z_*$ линейно зависимы. Имеем

$$Z_*\,w_* = Z_* F^{-1}\xi_* = (F - \frac{1}{a_*}\,\xi_*\,\eta_*^T)F^{-1}\xi_* =$$
$$= \xi_* - \frac{1}{a_*}\,\xi_*(\eta_*^T F^{-1}\xi_*).$$

Так как

$$\eta_*^T F^{-1}\xi_* = \eta_*^T w_* = \big\langle w_*,\ \operatorname{sign}(w_*)\big\rangle = \|w_*\|_1 = a_*,$$

то $Z_* w_* = \mathbb{O}$.

Теорема доказана. □

**3**°. Перепишем формулу (8) в виде

$$F[i,j] - Z_*[i,j] = \frac{1}{a_*}\,\xi_*[i]\,\eta_*[j], \quad i,j \in N.$$

Таким образом, при всех $i,j \in N$

$$\big|F[i,j] - Z_*[i,j]\big| = \frac{1}{a_*}$$

и

$$\operatorname{sign}\big\{F[i,j] - Z_*[i,j]\big\} = \xi_*[i]\,\eta_*[j].$$

Имеем типичную альтернансную картину. Матрицу $A_* = \xi_*\,\eta_*^T$, элементы которой равны $+1$ или $-1$, назовём *альтернансной матрицей*.

**ПРИМЕР.** Пусть $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда $F^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдём сигнум-вектор $\xi_*$. Для этого нужно перебирать все сигнум-векторы $\xi$, однако можно ограничиться лишь теми, у которых $\xi[1] = 1$. В данном случае конкурируют два вектора $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\|F^{-1}\xi_1\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 2,$$
$$\|F^{-1}\xi_2\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 12.$$

Значит, $\xi_* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_* = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\eta_* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_* = 12$. По теореме

$$F - Z_* = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$Z_* = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 35 & 25 \\ 49 & 35 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 35 \\ 49 \end{pmatrix} \left(1,\ \tfrac{5}{7}\right).$$

Альтернансная матрица имеет вид

$$A_* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4°**. Задача о наилучшем *среднеквадратичном* приближении матрицы матрицами меньшего ранга во всей полноте рассматривается в книге [2, с. 59–66].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Даугавет В. А., Сазонова Л. В. *Двумерная чебышёвская интерполяция* // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1984. Вып. 2 (№ 7). С. 89–91.

2. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.