ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ВИЛЕНКИНА-КРЕСТЕНСОНА*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
О. В. Просеков — sc2@pisem.net
А. Н. Сабаев

16 января 2008 г.

1°. Нам понадобится известный способ кодирования целых чисел. Пусть $N = n_1 n_2 \cdots n_s$. Число N при каждом $\nu \in 1 : s$ можно представить в виде $N = \Delta_\nu n_\nu N_\nu$. На базе чисел $\Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1}$ записывается разложение любого $j \in 0 : N-1$:

$$j = j_s\,(n_{s-1}n_{s-2}\cdots n_1) + j_{s-1}\,(n_{s-2}\cdots n_1) + \cdots + j_2\,n_1 + j_1 = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\,, \qquad (1)$$

где $j_\nu \in 0 : n_\nu - 1$. Набор коэффициентов разложения $(j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)$ образует *смешанный код* числа j. Запись $j = (j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)$ равносильна (1).

Отметим, что при всех $\nu \in 2 : s$

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\,\Delta_\alpha \leqslant \sum_{\alpha=1}^{\nu-1}(n_\alpha - 1)\,\Delta_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu-1}(\Delta_{\alpha+1} - \Delta_\alpha) = \Delta_\nu - 1\,. \qquad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$j_\nu = \big\langle \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor \big\rangle_{n_\nu}\,, \qquad \nu \in 1 : s\,. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1), $j = k\,n_1 + j_1$. Отсюда следует (3) при $\nu = 1$.

Пусть $\nu \geqslant 2$. Запишем

$$\frac{j}{\Delta_\nu} = \frac{1}{\Delta_\nu}\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\,\Delta_\alpha + j_\nu + \sum_{\alpha=\nu+1}^{s} j_\alpha\,\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\nu}\,. \qquad (4)$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

В силу (2) первая сумма из правой части (4) строго меньше единицы. Остаётся проверить, что вторая сумма делится на n_ν. Но это очевидно, поскольку

$$\sum_{\alpha=\nu+1}^{s} j_\alpha \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\nu} = \sum_{\alpha=\nu+1}^{s} j_\alpha \left(n_\nu n_{\nu+1} \cdots n_{\alpha-1}\right).$$

Предложение доказано. $\square$

2°. Для чисел k, j из $0 : N-1$ введём операцию $\oplus$ покомпонентного сложения их смешанных кодов. Запись $l = k \oplus j$ означает, что $l = (l_s, l_{s-1}, \ldots, l_1)$, где $l_\nu = \langle k_\nu + j_\nu \rangle_{n_\nu}$, $\nu \in 1 : s$. В этом случае множество $0 : N-1$ становится коммутативной группой с групповой операцией $\oplus$. Обозначим её G. Нейтральным элементом в G является ноль. Противоположный к $j = (j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)$ элемент имеет вид $j' = (j'_s, j'_{s-1}, \ldots, j'_1)$, где $j'_\nu = \langle n_\nu - j_\nu \rangle_{n_\nu}$, $\nu \in 1 : s$. Как обычно, $k \ominus j = k \oplus j'$. Нетрудно проверить, что

$$(k \ominus j) \oplus j = (k \oplus j) \ominus j = k\,. \tag{5}$$

Отметим, что при фиксированном $l \in 0 : N-1$ отображение $j \to j \oplus l$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Доказательство основано на том, что уравнение $j \oplus l = k$ при $k \in 0 : N-1$ имеет решение $j = k \ominus l$.

3°. Обозначим через $L(\mathrm{G})$ множество комплекснозначных функций на G. Это N-мерное комплексное пространство. В качестве базиса можно взять, например, систему дельта-функций $\{\delta_k\}_{k=0}^{N-1}$, где

$$\delta_k(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Координаты функции $f \in L(\mathrm{G})$ относительно дельта-базиса суть её значения, так как

$$f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, \delta_k(j)\,, \qquad j \in 0 : N-1\,.$$

Пространство $L(\mathrm{G})$ можно сделать унитарным, введя скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\, \overline{g(j)}\,.$$

При таком скалярном произведении дельта-базис ортогонален.

Если в $L(\mathrm{G})$ ввести умножение, положив $(fg)(j) = f(j)\, g(j)$, то $L(\mathrm{G})$ станет $\mathbb{C}$-алгеброй.

4°. *Дискретные функции Виленкина-Крестенсона* (ВК-функции) принадлежат $L(\mathrm{G})$ и определяются следующим образом:

$$v_k(j) = \exp\biggl(2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{k_\nu j_\nu}{n_\nu}\biggr) = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu}\,, \qquad k, j \in 0 : N-1\,. \tag{6}$$

Здесь $\omega_{n_\nu} = \exp(2\pi i/n_\nu)$. При $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 2$ функции v_k называются *дискретными функциями Уолша.*

Исследуем свойства ВК-функций. Очевидно, что $v_0(j) \equiv 1$ и $v_k(0) = 1$ при всех $k \in 0 : N-1$. При $k \in 1 : N-1$ найдётся элемент $j^{(k)} \in 1 : N-1$, на котором $v_k\bigl(j^{(k)}\bigr) \neq 1$. Действительно, если $k = (k_s, k_{s-1}, \ldots, k_1)$ и $k_\nu \neq 0$, то можно взять $j^{(k)} = \bigl(j_s^{(k)}, j_{s-1}^{(k)}, \ldots, j_1^{(k)}\bigr)$ с $j_\nu^{(k)} = 1$ и $j_\alpha^{(k)} = 0$ при $\alpha \neq \nu$. В этом случае, согласно (6), $v_k\bigl(j^{(k)}\bigr) = \omega_{n_\nu}^{k_\nu} \neq 1$.

Далее, $v_k(j) = v_j(k)$ и

$$1/v_k(j) = \overline{v_k(j)} = v_k(j') = v_{k'}(j)\,, \tag{7}$$

где j' и k' — элементы группы G, противоположные j и k соответственно. Проверим, например, равенство $1/v_k(j) = v_{k'}(j)$. Имеем

$$1/v_k(j) = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{(n_\nu - k_\nu) j_\nu} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{\langle n_\nu - k_\nu\rangle_{n_\nu} j_\nu} = v_{k'}(j)\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При всех $k \in 0 : N-1$ справедливы соотношения*

$$\bigl|v_k(j)\bigr| \equiv 1\,, \tag{8}$$

$$v_k(j \oplus l) = v_k(j)\, v_k(l)\,, \qquad j, l \in 0 : N-1\,. \tag{9}$$

Доказательство. Тождество (8) очевидно. Легко проверяется и свойство (9):

$$v_k(j \oplus l) = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu \langle j_\nu + l_\nu\rangle_{n_\nu}} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu (j_\nu + l_\nu)} = v_k(j)\, v_k(l)\,.$$

Предложение доказано. □

Формулы (8), (9) свидетельствуют о том, что ВК-функции $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ являются *характерами* группы G.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При всех $j \in 0 : N-1$ справедливо равенство*

$$v_k(j)\, v_l(j) = v_{k\oplus l}(j)\,. \tag{10}$$

Доказательство. Учитывая, что $v_k(j) = v_j(k)$, согласно (9) получаем

$$v_k(j)\, v_l(j) = v_j(k)\, v_j(l) = v_j(k \oplus l) = v_{k\oplus l}(j)\,.$$

Предложение доказано. □

Формулы (7), (10) позволяют утверждать, что ВК-функции $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ образуют коммутативную группу по умножению. Обозначим её $\widehat{\mathrm{G}}$. Нейтральным элементом в $\widehat{\mathrm{G}}$ является v_0. Элементом, обратным к v_k, согласно (7) будет $v_{k'}$.

Таким образом, множество ВК-функций представляет собой группу характеров $\widehat{\mathrm{G}}$ группы G. При этом $|\widehat{\mathrm{G}}| = |\mathrm{G}| = N$.

5°. Продолжим изучение ВК-функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_0(k)\,, \qquad k \in 0 : N-1\,. \tag{11}$$

Доказательство. При $k = 0$ утверждение очевидно. Пусть $k \in 1 : N-1$. Как отмечалось в предыдущем пункте, существует элемент $j^{(k)} \in 1 : N-1$, на котором $v_k\big(j^{(k)}\big) \neq 1$. Согласно (9) имеем

$$v_k\big(j^{(k)}\big) \sum_{j=0}^{N-1} v_k(j) = \sum_{j=0}^{N-1} v_k(j \oplus j^{(k)}) = \sum_{j=0}^{N-1} v_k(j)\,. \tag{12}$$

Последний переход основан на том, что множество $\{j \oplus j^{(k)}\}_{j=0}^{N-1}$ есть перестановка множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Из (12) следует, что при $k \in 1 : N-1$

$$\sum_{j=0}^{N-1} v_k(j) = 0\,.$$

Это равносильно (11). Предложение доказано. □

Поскольку $v_k(j) = v_j(k)$, то следствием (11) является формула

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_0(j)\,, \qquad j \in 0 : N-1\,. \tag{13}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *ВК-функции $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ попарно ортогональны и $\|v_k\|^2 = N$ при всех $k \in 0 : N-1$.*

Доказательство. Учитывая (7), (10) и (11), получаем

$$\langle v_k, v_l \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} v_k(j)\, \overline{v_l(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} v_{k\ominus l}(j) = N\, \delta_0(k \ominus l)\,,$$

что равносильно требуемому. □

6°. Обозначим через $L(\widehat{\mathrm{G}})$ множество комплекснозначных функций на $\widehat{\mathrm{G}}$. Введём *дискретное преобразование Виленкина-Крестенсона* (ВК-преобразование) $\mathcal{W}_N \colon L(\mathrm{G}) \to L(\widehat{\mathrm{G}})$. Оно сопоставляет функции $f \in L(\mathrm{G})$ функцию $\widehat{f} \in L(\widehat{\mathrm{G}})$ со значениями

$$\widehat{f}(k) := \widehat{f}(v_k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\, \overline{v_k(j)}\,, \qquad k \in 0 : N-1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Справедлива формула обращения*

$$f(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k)\, v_k(j)\,, \qquad j \in 0 : N-1\,. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно (7), (9) и (13) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k)\, v_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(l)\, \overline{v_k(l)} \right) v_k(j) =$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} f(l) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k(j \ominus l) \right\} = \sum_{l=0}^{N-1} f(l)\, \delta_0(j \ominus l) = f(j)\,.$$

Предложение доказано. □

Формула (14) представляет собой разложение произвольной функции $f \in L(\mathrm{G})$ по ортогональному ВК-базису $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$.

7°. Конечномерное пространство $L(\widehat{\mathrm{G}})$ состоит из функций $\widehat{f}$, областью определения которых является группа $\widehat{\mathrm{G}} = \{v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}\}$. Вместо $\widehat{f}(v_k)$ мы пишем $\widehat{f}(k)$.

В пространстве $L(\widehat{\mathrm{G}})$ можно ввести скалярное произведение и норму

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\, \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k)\, \overline{\widehat{g}(k)}\,, \qquad \|\widehat{f}\,\| = \sqrt{\langle \widehat{f}, \widehat{f}\, \rangle}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть* $\widehat{f} = \mathcal{W}_N(f)$, $\widehat{g} = \mathcal{W}_N(g)$. *Тогда*

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle = N\,\langle f, g\rangle\,. \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся (14). Получим

$$\begin{aligned}\langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k) \sum_{l=0}^{N-1} \overline{g(l)}\, v_k(l) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \overline{g(l)} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}(k)\, v_k(l) = N \sum_{l=0}^{N-1} \overline{g(l)}\, f(l) = N\,\langle f, g\rangle\,.\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Из (15) следует, что

$$\|\widehat{f}\,\|^2 = N\,\|f\|^2\,. \tag{16}$$

Формулы (16) и (15) называются соответственно *равенством Парсеваля* и *обобщённым равенством Парсеваля.*

8°. *Свёрткой* двух функций f, g из $L(\mathrm{G})$ называется функция $u \in L(\mathrm{G})$ со значениями

$$u(j) = \sum_{l=0}^{N-1} f(l)\, g(j \ominus l)\,, \qquad j \in 0 : N-1\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Справедливо равенство*

$$\widehat{u}(k) = \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k)\,, \qquad k \in 0 : N-1\,.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{u}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(l)\, g(j \ominus l) \right) \overline{v_k\big((j \ominus l) \oplus l\big)} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f(l)\, \overline{v_k(l)} \sum_{j=0}^{N-1} g(j \ominus l)\, \overline{v_k(j \ominus l)} = \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k)\,.\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

9°. Обозначим через W_N матрицу ВК-преобразования

$$W_N[k,j] = v_k(j)\,, \qquad k,j \in 0:N-1\,,$$

и через F_N — матрицу Фурье

$$F_N[k,j] = \omega_N^{kj}\,, \qquad k,j \in 0:N-1\,.$$

Напомним, что $N = n_1 n_2 \cdots n_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Справедлива формула*

$$W_N = F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes F_{n_1}\,,$$

где $\otimes$ — знак кронекерова умножения матриц.

Доказательство. Как известно, элемент с индексами $k = (k_s, k_{s-1}, \ldots, k_1)$, $j = (j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)$ кронекерова произведения квадратных матриц $A_{n_s}, A_{n_{s-1}}, \ldots, A_{n_1}$ порядков $n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1$ соответственно допускает представление

$$\big(A_{n_s} \otimes A_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes A_{n_1}\big)\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\Big] = \prod_{\nu=1}^{s} A_{n_\nu}[k_\nu, j_\nu]\,.$$

Пользуясь этим, получаем

$$\big(F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \cdots \otimes F_{n_1}\big)[k,j] = \prod_{\nu=1}^{s} F_{n_\nu}[k_\nu, j_\nu] = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_N^{k_\nu j_\nu} = v_k(j) = W_N[k,j]\,.$$

Предложение доказано. □

10°. Вернёмся к определению (6) ВК-функций. С учётом (3) его можно переписать так:

$$v_k(j) = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu \lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} = \exp\bigg(2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{k_\nu}{n_\nu} \Big\lfloor \frac{j}{\Delta_\nu} \Big\rfloor\bigg)\,.$$

Обозначим

$$\theta_k(j) = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{k_\nu}{n_\nu} \Big\lfloor \frac{j}{\Delta_\nu} \Big\rfloor\,.$$

Тогда

$$v_k(j) = \exp\big(2\pi i\,\theta_k(j)\big)\,, \qquad j \in 0:N-1\,. \tag{17}$$

Зафиксируем $k \in 0 : N-1$. Числу $v_k(j)$ соответствует точка на единичной окружности комплексной плоскости. Когда j возрастает от 0 до $N-1$, точка $v_k(j)$ движется по единичной окружности против часовой стрелки от положения $v_k(0)$ до $v_k(N-1)$. Замкнём это движение, положив $v_k(N) = v_k(0) = 1$. Отметим, что формула (17) остаётся справедливой и при $j = N$, поскольку

$$\theta_k(N) = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{k_\nu}{n_\nu} \left\lfloor \frac{\Delta_\nu n_\nu N_\nu}{\Delta_\nu} \right\rfloor = \sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, N_\nu =: \operatorname{rev}(k)\,.$$

Таким образом, когда j увеличивается от 0 до N, функция $\theta_k(j)$ возрастает от $\theta_k(0) = 0$ до $\theta_k(N) = \operatorname{rev}(k)$. За это время точка $v_k(j)$ обегает единичную окружность комплексной плоскости $\operatorname{rev}(k)$ раз. Число $\operatorname{rev}(k)$ естественно принять за *частоту* функции v_k.

11°. Разберёмся с величиной $\operatorname{rev}(k)$. По определению

$$\operatorname{rev}(k) = k_1\,(n_2 n_3 \cdots n_s) + k_2\,(n_3 \cdots n_s) + \cdots + k_{s-1}\, n_s + k_s\,.$$

Это значит, что $\operatorname{rev}(k)$ есть число из множества $0 : N-1$ со смешанным кодом $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ при условии, что для N используется представление $N = n_s n_{s-1} \cdots n_1$ (в отличие от $N = n_1 n_2 \cdots n_s$). Ясно, что $\operatorname{rev}(\operatorname{rev}(k)) = k$. Отсюда, в частности, следует, что отображение $k \to \operatorname{rev}(k)$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Упорядочим ВК-функции по частоте, положив $w_k = v_{\operatorname{rev}(k)}$. Функция w_k имеет частоту k. Перепишем формулу (14) в виде

$$f = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}\big(\operatorname{rev}(k)\big)\, v_{\operatorname{rev}(k)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}\big(\operatorname{rev}(k)\big)\, w_k\,.$$

Получили разложение произвольной функции $f \in L(\mathrm{G})$ по ВК-базису, упорядоченному по частоте.

12°. Детальному изучению ВК-функций при $n_1 = n_2 = \cdots = n_s =: n$ посвящена работа [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Обобщённые вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина-Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.