Работы Л. В. Канторовича о полиномах С. Н. Бернштейна

В. С. Виденский

8 февраля 2012 г.

1°. В 1912 году С. Н. Бернштейн, используя некоторые соображения из теории вероятностей, ввёл полиномы

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) p_{nk}(x), \tag{1}$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{2}$$

и установил, что для любой функции $f \in C[0,1]$ последовательность $\{B_n(f;x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к $f(x)$ равномерно по $x \in [0,1]$. Тем самым, было дано очень простое доказательство знаменитой теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении на отрезке непрерывной функции алгебраическими полиномами.

Работа С. Н. Бернштейна, занимавшая всего две страницы, была опубликована на французском языке в «Сообщ. Харьк. матем. об-ва». С. Н. Бернштейн разослал оттиски многим крупным математикам. Разумеется, в первую очередь авторам других доказательств теоремы Вейерштрасса: Лебегу, Фейеру и Эдм. Ландау.

В 1925 году Полиа и Сегё в своём сборнике задач поместили доказательство теоремы Бернштейна, которое, как и первоначальное, опиралось на теорию вероятностей, но при этом не привлекало её терминологии и техники. Необходимые тождества устанавливались непосредственно. В книгах по теории приближения функций теперь обычно излагается этот вариант. Кажется, в других работах до тридцатых годов не встречались какие-нибудь существенные результаты, связанные с полиномами (1).

2°. В 1930 году по инициативе академика С. Н. Бернштейна в Харькове состоялся Первый всесоюзный съезд математиков. На этом съезде три молодых математика Е. В. Вороновская, Л. В. Канторович и И. Н. Хлодовский сделали интересные доклады о свойствах и применении полиномов Бернштейна.

Л. В. Канторович исследовал приближение двух принципиально различных классов функций, а именно: функций, измеримых по Лебегу, и функций аналитических.

Для аппроксимации функций $f \in L[0,1]$ по базису Бернштейна (2) пространства полиномов степени n строятся полиномы

$$\Phi_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{nk}(f) p_{nk}(x), \tag{3}$$

где $\varphi_{nk}(f)$ — некоторые положительные функционалы, не обязательно линейные, подбираемые в зависимости от рассматриваемой задачи. Как правило, $\varphi_{nk}(f)$ — некоторое усреднение значений f в окрестности точек $\frac{k}{n}$. Этот метод видоизменения полиномов (1) Л. В. Канторович применял для явного построения полиномов, приближающих измеримые функции, в случаях, когда были известны только теоремы существования сходящихся последовательностей.

По теореме Фреше, если $f \in L[0,1]$, то существуют полиномы P_n, которые сходятся почти всюду к f. В качестве подходящих φ_{nk} Л. В. Канторович выбирает

$$\varphi_{nk}(f) = (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt,$$

то есть полиномы

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt. \tag{4}$$

Из полиномов Бернштейна (1) полиномы Канторовича (4) получаются так. Если

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

то

$$B'_{n+1}(F;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \big(F(\tfrac{k+1}{n+1}) - F(\tfrac{k}{n+1})\big) p_{nk}(x) = K_n(f;x).$$

Доказывается, что $K_n(f;x_0)$ сходится к $f(x_0)$ в каждой точке Лебега x_0, следовательно, почти всюду. Для оценки разности $\big|K_n(f;x_0) - f(x_0)\big|$ применяются известные из теории вероятностей неравенства для центральных моментов:

$$S_{2\nu,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (\tfrac{k}{n} - x)^{2\nu} p_{nk}(x) \leqslant A_\nu \frac{x(1-x)}{n^\nu}. \tag{5}$$

3°. Приводится также другой вариант применения операторов (3). Рассматривается вопрос о приближении на отрезке $[0,1]$ полунепрерывных сверху и ограниченных сверху функций f. По теореме Бэра для любой такой функции существует последовательность полиномов, которая сходится к ней на $[0,1]$. Л. В. Канторович строит приближающие полиномы, полагая

$$\varphi_{nk}(f) = \max\bigl(f(x) \mid |\tfrac{k}{n} - x| \leqslant \tfrac{3}{\sqrt[3]{n}}\bigr). \tag{6}$$

Выбор окрестностей точек $\frac{k}{n}$ диктуется применением в дальнейшем неравенства (5) при $\nu = 9$. Обозначим оператор (3) с $\varphi_{nk}(f)$ вида (6) через $\bar{\Phi}_n(f;x)$. Доказывается, что для всех $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\Phi}_n(f;x) = f(x); \quad \bar{\Phi}_n(f;x) \geqslant f(x).$$

4°. Вторую часть доклада Л. В. Канторович посвятил аппроксимации аналитических на отрезке $[0,1]$ функций. Для исследования поставленных проблем оказались достаточными классические полиномы (1), и не потребовались их видоизменения (3).

Сначала рассматривается случай, когда f является целой функцией. К её степенному ряду

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

почленно применяется оператор Бернштейна

$$B_n\bigl(f(t);z\bigr) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_n(t^k;z).$$

Легко доказать по индукции, что при $R > 1$ в круге $|z| \leqslant R$ выполняются неравенства

$$\bigl|B_n(t^k;z)\bigr| \leqslant 3^{k-1}R^k,$$

в которых правая часть не зависит от n. Таким образом,

$$\bigl|B_n(f;z)\bigr| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| 3^{k-1} R^k = S(R).$$

Значит, последовательность $\bigl\{B_n(f;z)\bigr\}$ по теореме Монтеля компактна в круге $|z| \leqslant R$. С другой стороны, она равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0,1]$; следовательно, по теореме Витали последовательность $\bigl\{B_n(f;z)\bigr\}$ сходится равномерно к $f(z)$ в круге $|z| \leqslant R$.

5°. В 1912 году С. Н. Бернштейн исследовал наилучшее приближение функции f, аналитической на отрезке $[a, b]$. С этой целью он разложил f в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышёва T_k:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(t). \tag{7}$$

Обозначим через E некоторый эллипс с центром в середине отрезка $[a, b]$ и полюсами на его концах a и b. Если f регулярна внутри и на границе E, то ряд (7) сходится равномерно на $\bar{E}$.

Л. В. Канторович рассмотрел приближение полиномами Бернштейна аналитической на отрезке $[0, 1]$ функции f и применил почленно к ряду (7) оператор B_n:

$$B_n(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B_n(T_k; z).$$

По схеме, аналогичной той, которая была использована для целых функций, Л. В. Канторович доказал, что последовательность $\big\{B_n(f; z)\big\}$ компактна на E и равномерно сходится к $f(z)$ на $\bar{E}$. Неожиданно он попутно заметил, что иногда в некоторых точках z_0, не лежащих в E, $\lim_{n\to\infty} B_n(f; z_0) = f(z_0)$.

6°. Эти работы Л. В. Канторовича очень заинтересовали академика С. Н. Бернштейна, который представил две его статьи в академические журналы; одну в ДАН(1930) и другую в ИАН(ОМЕН) (1931). Кроме того, С. Н. Бернштейн и сам включился в исследование области сходимости $\{B_n(f)\}$ к f, когда f аналитическая на $[0, 1]$. На эту тему он опубликовал в 1936 году две краткие заметки и одну большую статью в 1943 году. Эта статья начинается словами: «Вопрос о сходимости в комплексной области многочленов $B_n(f)$ впервые был рассмотрен Л. В. Канторовичем в прекрасной работе [2]».

Мне кажется, что во всех четырёх томах Сочинений С. Н. Бернштейна не найдётся больше ни одного столь похвального отзыва о какой-нибудь работе другого автора.

С. Н. Бернштейн получил новые глубокие результаты, выразив полином $B_n(f; z)$ через контурный интеграл и использовав всю мощь технического аппарата теории функций комплексного переменного.

7°. По совету Л. В. Канторовича Г. Р. Лоренц рассмотрел вопрос о приближении $f \in L^p[0, 1]$ полиномами. Он доказал, что последовательность полиномов $\big\{K_n(f)\big\}$ сходится к f в метрике пространства L^p.

В. Г. Амелькович — ученица львовского профессора И. Г. Соколова — исследовала в общем виде операторы Канторовича (3). Приведём вкратце её интересный результат. Пусть $\varphi_{nk}(f)$ — линейные положительные функционалы, определённые на $[0, 1]$, и все $\varphi_{nk}(1)$ равны единице, так что $\Phi_n(1; x) = 1$.

Обозначим

$$\delta_n = \big\|\Phi_n(t^2;x) - x^2\big\| + 2\big\|\Phi_n(t;x) - x\big\|.$$

Справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n\delta_n \geqslant c, \tag{8}$$

где постоянная c положительна, $c \geqslant 0,01$. Мы видим, что по крайней мере одна из двух функций t или t^2 не может быть приближена операторами Φ_n со скоростью, большей чем n^{-1}. Неравенство (8) было выведено при помощи рассуждений, которые Л. В. Канторович применил для доказательства теорем Фреше и Бэра.

В. С. Виденский вывел неравенство (8) иным способом и вычислил, что $c = 0,25$. Это точная постоянная; равенство достигается для полиномов Бернштейна при любом n.

8°. Съезд математиков в Харькове проходил через 18 лет после того, как были построены полиномы Бернштейна. Однако, к тому времени еще немногие начали их применять или исследовать их свойства. Л. В. Канторович был в числе первых, кто внёс серьёзный вклад в применение и обобщение этих полиномов.

Затем ситуация резко изменилась. Многие математики стали интересоваться полиномами Бернштейна и линейными положительными операторами бернштейновского типа. Библиография работ в этом направлении за последние 60 лет насчитывает больше чем 1500 названий.

Я благодарен проф. В. Н. Малозёмову, который выдвинул тему этой заметки и обсудил со мной в общих чертах её содержание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. *О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна.* ДАН(А), 1930, **20**, с. 563–566; **21**, с. 595–600.

2. Л. В. Канторович. *О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала.* ИАН(ОМЕН), 1931, с. 1103–1115.

3. Л. В. Канторович. *La representation explicite d'une fonction mesurable arbitraire dans la forme de la limite d'une suite de polynomes.* Матем. сб., 1934, **41**, с. 508–510.

4. С. Н. Бернштейн. *Сочинения.* Т.1. М. 1952; Т.2. М. 1954. Статьи № 3, 4, 57, 64, 65, 81.

5. Г. Р. Лоренц. *Zur Theorie der Polynome von S. Bernstein.* Матем.сб., 1937, **2** (44), с. 543–556.

6. В. Г. Амелькович. *Об одном семействе положительных полиномиальных операторов.* В сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций». Баку, 1965, с. 98–104.

7. В. С. Виденский. *Многочлены Бернштейна.* Л.: Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990, п. 10, 11.