ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША*

В. Н. Малозёмов
malv@math.spbu.ru

12 марта 2011 г.

В докладе приводятся базовые сведения о дискретных функциях Уолша.

1°. Пусть $N = 2^s$, где s — натуральное число. Возьмём числа $k, j \in 0 : N-1$ и запишем их двоичные коды

$$k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_2\,, \quad j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2\,.$$

Здесь k_α и j_α принимают значения 0 или 1. Обозначим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, j_\alpha\,.$$

Функции

$$v_k(j) = (-1)^{\{k,j\}_s} = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha j_\alpha}, \quad k, j \in 0 : N-1, \tag{1}$$

называются *дискретными функциями Уолша*. Очевидно, что

$$v_0(j) \equiv 1 \quad \text{и} \quad v_k(0) = 1 \quad \text{при } k \in 1 : N-1.$$

Дискретные функции Уолша принимают только два значения ± 1.

2°. Дискретные функции Уолша связаны с *матрицами Адамара*. Последние определяются рекуррентно

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} \quad \text{при } \nu = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Матрица A_ν имеет порядок 2^ν. Будем считать, что индексы её строк и столбцов изменяются от 0 до $2^\nu - 1$.

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: http://www.dha.spb.ru/

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула*

$$A_\nu[k,j] = (-1)^{\{k,j\}_\nu}, \quad k,j \in 0:2^\nu - 1. \tag{3}$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (3) очевидна, поскольку $\{k,j\}_1 = kj$ при $k,j \in 0:1$. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмём $k,j \in 0:2^\nu - 1$ и представим их в виде

$$k = k_{\nu-1}\,2^{\nu-1} + k', \quad j = j_{\nu-1}\,2^{\nu-1} + j',$$

где $k' = (k_{\nu-2},\ldots,k_0)_2$, $j' = (j_{\nu-2},\ldots,j_0)_2$. Согласно (2)

$$A_\nu[k,j] = (-1)^{k_{\nu-1}j_{\nu-1}} A_{\nu-1}[k',j']$$

($k_{\nu-1}$, $j_{\nu-1}$ — индексы блоков, k', j' — индексы элемента внутри блока). По индукционному предположению

$$A_{\nu-1}[k',j'] = (-1)^{\{k',j'\}_{\nu-1}},$$

так что

$$A_\nu[k,j] = (-1)^{k_{\nu-1}j_{\nu-1} + \{k',j'\}_{\nu-1}} = (-1)^{\{k,j\}_\nu}.$$

Предложение доказано. □

Сравнивая (1) и (3), получаем

$$v_k(j) = A_s[k,j], \quad k,j \in 0:N-1, \tag{4}$$

то есть значения $v_k(j)$ на множестве $0:N-1$ совпадают с k-й строкой матрицы Адамара A_s.

ПРИМЕР. Построим графики дискретных функций Уолша при $N = 2^3 = 8$. Согласно (2) имеем

$$A_2 = \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right], \quad A_3 = \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

На рис. 1 представлены графики функций $v_k(j)$, $j \in 0:7$, при $k \in 0:7$.

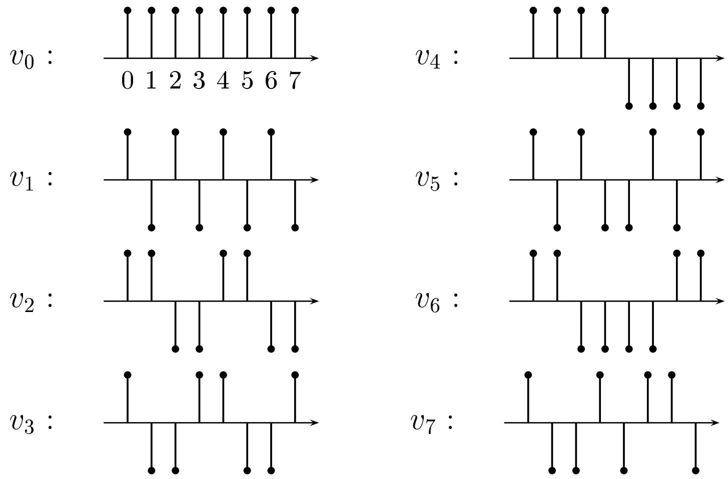

Рис. 1. Графики дискретных функций Уолша при $N = 8$.

3°. Введём скалярное произведение и норму дискретных функций Уолша:

$$\langle v_k, v_{k'} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} v_k(j)\, v_{k'}(j), \qquad \|v_k\| = \sqrt{\langle v_k, v_k \rangle}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При $N = 2^s$ дискретные функции Уолша $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ попарно ортогональны и $\|v_k\| = \sqrt{N}$ при всех $k \in 0 : N-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что в силу (3) матрицы A_ν симметричны. Кроме того,

$$A_\nu\, A_\nu = 2^\nu E_{2^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

где E_{2^ν} — единичная матрица порядка 2^ν. При $\nu = 1$ это очевидно. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν. Согласно (2)

$$A_\nu\, A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_{\nu-1}A_{\nu-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 2A_{\nu-1}A_{\nu-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^\nu E_{2^{\nu-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 2^\nu E_{2^{\nu-1}} \end{bmatrix} = 2^\nu E_{2^\nu}.$$

Равенство (5) установлено.

Теперь воспользуемся формулами (4), (5) при $\nu = s$ и симметричностью матрицы A_s. Получим

$$\langle v_k, v_{k'} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} A_s[k,j]\, A_s[k',j] = \sum_{j=0}^{N-1} A_s[k,j]\, A_s[j,k'] =$$

$$= \big(A_s A_s\big)[k,k'] = 2^s E_{2^s}[k,k'].$$

Предложение доказано. □

4°. Продолжим изучение свойств дискретных функций Уолша. Согласно (1)

$$v_k(j) = v_j(k), \quad k, j \in 0 : N-1. \tag{6}$$

Далее, справедливо равенство

$$\tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_N(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{7}$$

При $j = 0$ это очевидно. Пусть $j \in 1 : N-1$. В силу ортогональности функций Уолша и (6) имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \sum_{k=0}^{N-1} v_j(k)\, v_0(k) = 0,$$

что эквивалентно (7).

Для формулировки очередных свойств нам потребуется операция поразрядного сложения чисел из множества $0 : 2^s - 1$. Пусть

$$k = (k_{s-1}, \ldots, k_0)_2\,, \quad j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_2\,.$$

Число $l = (l_{s-1}, \ldots, l_0)_2$ называется поразрядной суммой чисел k и j, $l = k \oplus j$, если

$$l_\alpha = \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2\,, \quad \alpha \in 0 : s-1,$$

где $\langle n \rangle_2 = n - 2\lfloor n/2 \rfloor$ есть остаток от деления целого числа n на 2.

Нетрудно понять, что $j \oplus j = 0$ при всех $j \in 0 : 2^s - 1$. Отметим также, что при $k, j \in 0 : 2^s - 1$

$$\delta_N(k \oplus j) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{если } k \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедлива формула*

$$v_k(j \oplus r) = v_k(j)\, v_k(r), \quad j, r \in 0 : N-1. \tag{9}$$

Действительно,

$$v_k(j \oplus r) = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha (j \oplus r)_\alpha} = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha \langle j_\alpha + r_\alpha \rangle_2} =$$

$$= \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_\alpha (j_\alpha + r_\alpha)} = v_k(j)\, v_k(r). \qquad \square$$

Согласно (6) и (9)

$$v_k(j)\,v_{k'}(j) = v_j(k)\,v_j(k') = v_j(k \oplus k') = v_{k\oplus k'}(j).$$

Таким образом,

$$v_k(j)\,v_{k'}(j) = v_m(j), \quad j \in 0 : N-1, \tag{10}$$

где $m = k \oplus k'$. К этому нужно добавить формулу

$$1/v_k(j) = v_k(j), \quad j \in 0 : N-1, \tag{11}$$

справедливость которой следует из тождества $v_k^2(j) \equiv 1$.

Соотношения (10) и (11) характеризуют систему дискретных функций Уолша $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ как *мультипликативную* систему.

5°. Операция поразрядного сложения коммутативна и ассоциативна. Коммутативность, $k \oplus j = j \oplus k$, очевидна. Проверим ассоциативность:

$$(k \oplus j) \oplus r = k \oplus (j \oplus r).$$

При $\alpha \in 0 : s-1$ имеем

$$\big((k \oplus j) \oplus r\big)_\alpha = \big\langle (k \oplus j)_\alpha + r_\alpha \big\rangle_2 = \big\langle \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2 + r_\alpha \big\rangle_2 =$$
$$= \big\langle (k_\alpha + j_\alpha) + r_\alpha \big\rangle_2 = \big\langle k_\alpha + \langle j_\alpha + r_\alpha \rangle_2 \big\rangle_2 = \big(k \oplus (j \oplus r)\big)_\alpha .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При фиксированном* $k \in 0 : N-1$ *отображение* $j \to j \oplus k$ *является перестановкой множества* $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Доказательство. Указанное отображение переводит множество $0 : N-1$ в себя, поэтому достаточно проверить, что уравнение $x \oplus k = j$ имеет на $0 : N-1$ решение при любом $j \in 0 : N-1$. Таким решением будет $x_0 = j \oplus k$. Действительно,

$$x_0 \oplus k = (j \oplus k) \oplus k = j \oplus (k \oplus k) = j. \qquad \square$$

В табл. 1 указана перестановка $j \to j \oplus k$ при $N = 8 = 2^3$ и $k = 6 = (1, 1, 0)_2$.

Таблица 1

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$j \oplus 6$	6	7	4	5	2	3	0	1

Можно ввести операцию поразрядного вычитания $k \ominus j$, положив

$$(k \ominus j)_\alpha = \langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 , \quad \alpha \in 0 : s-1.$$

Но эта операция избыточна, поскольку

$$k \ominus j = k \oplus j.$$

Проверим последнее равенство. Запишем его в развёрнутом виде

$$\langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 = \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2\,, \quad \alpha \in 0 : s-1, \tag{12}$$

где $k_\alpha, j_\alpha \in 0 : 1$. Зафиксируем α. При $k_\alpha = j_\alpha$ равенство (12) справедливо $(0 = 0)$. Пусть $k_\alpha \neq j_\alpha$. Тогда $\langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_2 = 1$. Вместе с тем, $\langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 = 1$ при $k_\alpha = 1$, $j_\alpha = 0$ и при $k_\alpha = 0$, $j_\alpha = 1$ также

$$\langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_2 = \langle -1 \rangle_2 = -1 - 2\lfloor (-1)/2 \rfloor = 1.$$

6°. Введём *дикретное преобразование Уолша* $\mathcal{W}_N \colon \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$, сопоставляющее сигналу $x \in \mathbb{C}_N$ сигнал $X = \mathcal{W}_N(x)$ с отсчётами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, v_k(j), \quad k \in 0 : N-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (формула обращения). *Справедливо равенство*

$$x(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, v_k(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно (9), (7) и (8) имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, v_k(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, v_k(l) \Big)\, v_k(j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} v_k(l)\, v_k(j) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} v_k(l \oplus j) = N \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, \delta_N(l \oplus j) = N x(j),$$

что равносильно (13). □

Сигнал $X = \mathcal{W}_N(x)$ называется *спектром Уолша* сигнала x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть $x, y \in \mathbb{C}_N$ и $X = \mathcal{W}_N(x)$, $Y = \mathcal{W}_N(y)$. Тогда*

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{N} \langle X, Y \rangle. \tag{14}$$

Действительно, в силу (13) и вещественности v_k

$$\tfrac{1}{N}\langle X, Y\rangle = \tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, v_k(l)\Big)\,\overline{Y}(k) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\Big\{\tfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{Y}(k)\, v_k(l)\Big\} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\overline{y}(l) = \langle x, y\rangle.$$

При $x = y$ из (14) следует, что

$$\|x\|^2 = \tfrac{1}{N}\,\|X\|^2. \tag{15}$$

Соотношения (15), (14) называются соответственно *равенством Парсеваля* и *обобщённым равенством Парсеваля* для дискретного преобразования Уолша.

7°. *Диадной свёрткой* сигналов x, y из $\mathbb{C}_N$ называется сигнал z с отсчётами

$$z(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, y(k \oplus j), \quad k \in 0 : N-1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (о диадной свёртке)**.** *Пусть z есть диадная свёртка сигналов x, y из $\mathbb{C}_N$. Тогда*

$$\mathcal{W}_N(z) = \mathcal{W}_N(x)\,\mathcal{W}_N(y).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (9) и тем фактом, что отображение $j \to j \oplus l$ является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Получим

$$\big[\mathcal{W}_N(z)\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\, y(j \oplus l)\Big)\, v_k\big((j \oplus l) \oplus l\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j'=0}^{N-1} y(j')\, v_k(j' \oplus l) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j=0}^{N-1} y(j)\, v_k(j)\, v_k(l) =$$

$$= \big[\mathcal{W}_N(x)\big](k)\,\big[\mathcal{W}_N(y)\big](k). \qquad \square$$

8°. Обратимся к вопросу о *частоте* дискретной функции Уолша $v_k(j)$. Начнём с экспоненциальной функции

$$u_k(j) = \exp\big(i\,\tfrac{2\pi k}{N}\, j\big).$$

Её частота считается равной k. Это связано с тем, что при изменении j от 0 до N (до начала следующего периода) аргумент комплексного числа $u_k(j)$, равный $\frac{2\pi k}{N} j$, изменяется, монотонно возрастая, от 0 до $2\pi k$, то есть точка $u_k(j)$ пробегает k раз единичную окружность комплексной плоскости.

Рассмотрим с этой точки зрения дискретную функцию Уолша

$$v_k(j) = (-1)^{\{k,j\}_s} = \exp\bigl(i\pi\{k,j\}_s\bigr).$$

К сожалению, величина $\{k,j\}_s$ не возрастает монотонно вместе с j. Пример поведения этой величины при $N = 8 = 2^3$ и $k = 3 = (0,1,1)_2$ представлен в табл. 2.

Таблица 2

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\{k,j\}_3$	0	1	1	2	0	1	1	2

Чтобы добиться монотонности, приведём $v_k(j)$ при $j = (j_{s-1},\dots,j_0)_2$ к виду

$$v_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha (j_\alpha + j_{\alpha+1}2 + \cdots + j_{s-1}2^{s-1-\alpha})}.$$

Отметим, что

$$j/2^\alpha = j_{s-1}\,2^{s-1-\alpha} + \cdots + j_{\alpha+1}\,2 + j_\alpha + j_{\alpha-1}\,2^{-1} + \cdots + j_0\,2^{-\alpha},$$

так что

$$\lfloor j/2^\alpha \rfloor = j_{s-1}\,2^{s-1-\alpha} + \cdots + j_{\alpha+1}\,2 + j_\alpha\,.$$

Получаем

$$v_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha \lfloor j/2^\alpha \rfloor}, \quad j \in 0 : N-1.$$

Обозначив

$$\theta_k(j) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha \lfloor j/2^\alpha \rfloor,$$

придём к представлению

$$v_k(j) = (-1)^{\theta_k(j)}, \quad j \in 0 : N-1. \tag{16}$$

Формула (16) верна и при $j = N = 2^s$. В этом случае

$$\theta_k(N) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, 2^{s-\alpha} = 2\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, 2^{s-1-\alpha}. \tag{17}$$

Следовательно, правая часть (16) при $j = N$ равна единице. В силу N-периодичности и левая часть (16) при $j = N$ равна единице. Действительно, $v_k(N) = v_k(0) = 1$. Таким образом, формула (16) справедлива при $j \in 0 : N$.

Перепишем (16) в виде

$$v_k(j) = \exp\bigl(i\pi\theta_k(j)\bigr), \quad j \in 0 : N.$$

Теперь аргумент комплексного числа $v_k(j)$, равный $\pi\theta_k(j)$, при изменении j от 0 до N изменяется, *монотонно не убывая*, от 0 до $\pi\theta_k(N)$.

Разберёмся с величиной $\theta_k(N)$ (см. (17)). Отметим, что

$$\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha\, 2^{s-1-\alpha} = k_0\, 2^{s-1} + k_1\, 2^{s-2} + \cdots + k_{s-1}\,.$$

В правой части этого равенства стоит число, двоичным кодом которого является перевёрнутый двоичный код числа k. Обозначим его $\mathrm{rev}_s(k)$ (от английского слова *reverse*). Согласно (17),

$$\theta_k(N) = 2\,\mathrm{rev}_s(k).$$

Приходим к следующему заключению: при изменении j от 0 до N аргумент комплексного числа $v_k(j)$ изменяется, монотонно не убывая, от 0 до $2\pi\,\mathrm{rev}_s(k)$, то есть точка $v_k(j)$ пробегает $\mathrm{rev}_s(k)$ раз единичную окружность комплексной плоскости. Естественно число $\mathrm{rev}_s(k)$ считать частотой дискретной функции Уолша v_k.

9°. Очевидно, что $\mathrm{rev}_s(k) \in 0 : N-1$, поэтому отображение $k \to \mathrm{rev}_s(k)$ есть отображение множества $0 : N-1$ в себя. На самом деле, это отображение является *перестановкой* множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, что следует из равенства $\mathrm{rev}_s(\mathrm{rev}_s(k)) = k$, $k \in 0 : N-1$.

В табл. 3 приведён пример такой перестановки при $N = 8 = 2^3$.

Таблица 3

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{rev}_3(k)$	0	4	2	6	1	5	3	7

10°. Обозначим

$$\widehat{v}_k = v_{\mathrm{rev}_s(k)}\,.$$

Согласно (1) имеем

$$\widehat{v}_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1}(\mathrm{rev}_s(k))_\alpha\, j_\alpha} = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{s-1-\alpha}\, j_\alpha}, \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Частота функции $\widehat{v}_k$ равна k, так что система функций

$$\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_{N-1}$$

упорядочена по частоте. Она называется *системой Уолша-Пэли* в отличие от исходной системы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$, которая называется *системой Уолша-Адамара.*

На рис. 2 представлена система Уолша-Пэли при $N = 8 = 2^3$ (ср. с рис. 1).

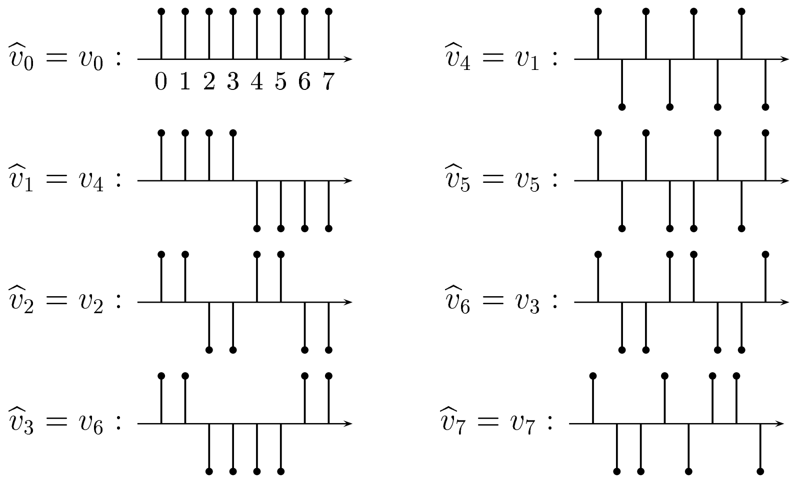

Рис. 2. Графики дискретных функций Уолша,
упорядоченных по частоте, при $N = 8$.

11°. Вернёмся к разложению (13) сигнала x по базису Уолша-Адамара. Отметим, что

$$v_{\mathrm{rev}_s(k)}(\mathrm{rev}_s(j)) = v_k(j),$$

поэтому

$$x(j) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, v_{\mathrm{rev}_s(k)}(\mathrm{rev}_s(j)) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \widehat{v}_k(\mathrm{rev}_s(j)).$$

Заменив j на $\mathrm{rev}_s(j)$, получим

$$x(\mathrm{rev}_s(j)) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, \widehat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Таким образом, спектр Уолша-Адамара $\{X(k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала $x(j)$ является одновременно спектром Уолша-Пэли сигнала $x(\mathrm{rev}_s(j))$.

12°. Обобщению дискретных функций Уолша посвящён доклад [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Просеков О. В., Сабаев А. Н. *Дискретные функции Виленкина-Крестенсона* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 16 января 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0116`).