САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Чашников Николай Викторович

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ С ВЕКТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПОВЕРХНОСТИ КУНСА

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор
Малозёмов Василий Николаевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
Демьянович Юрий Казимирович,
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор физико-математических наук, профессор
Певный Александр Борисович
(Сыктывкарский государственный университет)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Академический университет РАН
(Санкт-Петербург)

Защита состоится 10 июня 2010 г. в 13 часов на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 2448.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» ________ 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Область прикладной математики, называемая *геометрическим моделированием (компьютерная геометрия, Computer Aided Geometric Design, CAGD)*, активно развивается с середины 20-го века. В этой области изучаются способы построения кривых, поверхностей и тел, а также компьютерная реализация различных операций, производимых с ними. Геометрическому моделированию посвящены несколько книг и монографий. Кроме того, эта область является темой множества статей, часть из которых выходит в специализированных журналах (Computer Aided Geometric Design, Computers & Graphics, Computer Graphics and Image Processing).

Обычно в геометрическом моделировании кривая определяется как множество значений непрерывной вектор-функции, заданной на отрезке вещественной оси. Например, для построения замкнутых кривых можно использовать тригонометрические полиномы. Однако реально используются значения вектор-функции только в некотором конечном числе точек. Поэтому можно с самого начала определять кривую при помощи вектор-функции, заданной на дискретном множестве. В случае замкнутой кривой для этой цели можно применить *дискретные периодические сплайны*[1], которые были введены для нужд *дискретного гармонического анализа.* Если в гармоническом анализе рассматривались сплайны с комплексными коэффициентами, то в геометрическом моделировании естественно использовать вещественные векторные коэффициенты. При этом свойства дискретных сплайнов можно распространить на получаемые кривые. Особенно важно *свойство минимальной нормы*, которое гарантирует, что построенные кривые не будут иметь нежелательных осцилляций.

Поверхность в геометрическом моделировании определяется вектор-функцией от двух параметров, заданных на прямоугольной или треугольной области. Существуют различные подходы к построению поверхностей. Один из способов предложил Стивен Кунс (Steven Coons)[2]. Он указал формулу поверхности, границей которой является заданный криволинейный четырёхугольник. Поверхности такого вида называются теперь *билинейными поверхностями Кунса.* В той же работе вводится *бикубическая поверхность Кунса*, которая интерполирует не только значения, но и производные на границе четырёхугольной области.

Часто для получения поверхности нужной формы недостаточно задать её граничные кривые. В таких случаях определяют сеть из пересекающихся кривых, через которые должна проходить поверхность. Требуемую поверхность можно составить из нескольких бикубических поверхностей Кунса, но для обеспечения гладкости необходимо согласовывать значения производных на кривых и в узлах сетки. Чтобы избежать связанных с этим трудностей, Уильям Гордон (William Gordon) предложил способ, позволяющий задать всю поверхность одной формулой. Построенная поверхность проходит через все кривые и обладает требуемой гладкостью. Поверхности такого вида называются *поверхностями Гордона.*

Идеи Кунса применимы не только для получения поверхностей с четырёхугольной областью определения параметров. Можно построить поверхность, границей которой является заданный криволинейный треугольник. В отличие от поверхностей Кунса на четырёхугольнике, для треугольников существуют различные способы решения этой задачи. Дальнейшие исследования привели к построению поверхности, заполняющей внутрен-

[1] Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

[2] Coons S. *Surfaces for computer aided design of space forms.* Technical report, MIT, 1967.

ность криволинейного пятиугольника и, в общем случае, n-угольника.

Изначально поверхности Кунса были получены как наиболее простые поверхности, удовлетворяющие заданным граничным условиям. При этом существует бесконечное множество других поверхностей, удовлетворяющих тем же условиям. Оказалось, что для некоторых видов граничных условий можно определить целевой функционал таким образом, что соответствующая поверхность Кунса будет доставлять минимум этому функционалу на множестве всех поверхностей, удовлетворяющих заданным условиям. Это свойство называется *свойством минимальной нормы*.

Были описаны различные способы обобщения поверхностей Кунса. Можно обобщить формулу поверхности Кунса со случая двух переменных на случай произвольного количества переменных. Также исследовалось обобщение вида зависимости внутренних точек поверхности Кунса от точек на границе. Например, каждая точка билинейной поверхности Кунса является линейной комбинацией восьми граничных точек. В общем случае зависимость может выражаться суммой граничных точек с некоторыми коэффициентами или даже интегралом по границе с некоторым весом. Кроме того, условия для поверхности Кунса можно задавать не граничными кривыми, а граничными поверхностями. Это позволяет строить поверхности Кунса, гладким образом заполняющие отверстия различной формы.

Цель работы.

1) *Построение замкнутых кривых при помощи дискретных периодических сплайнов с векторными коэффициентами и исследование свойств таких кривых.*

2) *Обобщение поверхностей Кунса, позволяющее определять замкнутые поверхности на базе дискретных периодических сплайнов.*

3) *Установление свойств минимальной нормы для получаемых кривых и поверхностей.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовались методы дискретного гармонического анализа, вычислительной математики, вариационного исчисления и конструктивной теории функций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) *Предложен способ построения замкнутых кривых при помощи дискретных периодических сплайнов с векторными коэффициентами.*

2) *Найдены предельные кривые для интерполяционных дискретных периодических сплайнов.*

3) *Разработан способ построения замкнутых кривых, проходящих через заданные точки и имеющих в них заданные направления. Исследованы экстремальные и предельные свойства этих кривых.*

4) *Предложен способ обобщения поверхностей Кунса, позволяющий строить замкнутые поверхности на базе дискретных периодических сплайнов с векторными коэффициентами.*

5) *Установлено свойство минимальной нормы для обобщённой поверхности Кунса.*

6) *Найден предел дискретных поверхностей Кунса при уменьшении шага дискретизации и доказано свойство минимальной нормы для предельной поверхности.*

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы для построения замкнутых кривых и поверхностей в системах автоматического проектирования.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международная научная конференция «Космос, астрономия и программирование» (Лавровские чтения) (Санкт-Петербург, 20-22 мая 2008 г.);
- семинар кафедры вычислительной математики математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар кафедры исследования операций математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD).

Публикации. По теме диссертации опубликовано шесть работ [1–6], перечисленных в конце автореферата. Статьи [1–3] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Работы [1, 2] написаны в соавторстве. В статье [1] В. Н. Малозёмову принадлежит идея построения кривых при помощи дискретных периодических сплайнов с векторными коэффициентами. Метод построения замкнутых поверхностей разработан диссертантом. В работе [2] В. Н. Малозёмов предложил упрощение обозначений и доказательств. Диссертанту принадлежит идея использования линейных операторов для записи граничных условий и условий на смешивающие функции, а также способ построения поверхности тора при помощи бикубических поверхностей Кунса.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 11 параграфов и списка литературы. Объём диссертации — 113 страниц. Список литературы насчитывает 45 наименований. В диссертации имеется 39 рисунков.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена построению кривых при помощи дискретных периодических сплайнов с векторными коэффициентами.

В § 1 вводятся основные понятия дискретного гармонического анализа. Для натурального N обозначим через $\mathbb{C}_N$ пространство N-периодических комплекснозначных функций целочисленного аргумента, называемых *сигналами*. Положим $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Для целого неотрицательного числа r *дискретная N-периодическая функция Бернулли порядка r* определяется формулой

$$b_{r,N}(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\omega_N^k - 1)^{-r}\omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $N = mn$, где n, m — натуральные числа, отличные от единицы. Приведём определение *дискретных N-периодических B-сплайнов.* B-сплайн первого порядка на основном периоде $0 : N-1$ задаётся явно

$$Q_{1,n}(j) = \begin{cases} n-j & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n : N-n, \\ j-N+n & \text{при } j \in N-n+1 : N-1. \end{cases}$$

B-сплайны более высоких порядков определяются с помощью циклической свёртки

$$Q_{\nu,n}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} Q_{1,n}(k)\, Q_{\nu-1,n}(j-k), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Дискретным периодическим сплайном порядка r называется сигнал вида

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p\, Q_{r,n}(j-pn), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $a_p \in \mathbb{C}$. Сплайн порядка r можно также выразить через функции Бернулли:

$$S(j) = c_0 + \sum_{p=0}^{m-1} c_1(p) b_{2r,N}(j+r-pn),$$

где c_0, $c_1(0)$, $c_1(1)$, $\ldots$, $c_1(m-1)$ — комплексные коэффициенты, для которых выполняется соотношение $\sum_{p=0}^{m-1} c_1(p) = 0$.

В § 2 описываются дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами. Введём нормализованные B-сплайны

$$\widetilde{Q}_{r,n}(j) = \frac{1}{n^{2r-1}}\, Q_{r,n}(j), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть задано натуральное число d. *Дискретный N-периодический сплайн порядка r с векторными коэффициентами* определим как вектор-функцию вида

$$\mathbf{S}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{a}_p\, \widetilde{Q}_{r,n}(j-pn), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим интерполяционную задачу для дискретных периодических сплайнов

$$\mathbf{S}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}(l) \in \mathbb{R}^d$ — заданные векторы. Эта задача имеет единственное решение. Кроме того, интерполяционный сплайн доставляет единственный минимум функционалу

$$\sum_{j=0}^{N-1} \big\| \big(\Delta^r \mathbf{f}\big)(j) \big\|^2$$

на множестве всех N-периодических вектор-функций $\mathbf{f}(j)$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{f}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Это свойство называется свойством минимальной нормы.

Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами можно использовать в геометрическом моделировании для построения замкнутых кривых. Чтобы пояснить это, перепишем формулу (1) в виде

$$\mathbf{S}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \widetilde{Q}_{r,n}(j - pn)\, \mathbf{a}_p.$$

При фиксированном j числа $\widetilde{Q}_{r,n}(j - pn)$, $p \in 0 : m-1$, неотрицательны и в сумме равны единице, так что $\mathbf{S}(j)$ есть выпуклая комбинация векторов $\mathbf{a}_p$, называемых *полюсами*. Соединим отрезками пары соседних точек $\mathbf{S}(j)$, $\mathbf{S}(j+1)$ для $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную в пространстве $\mathbb{R}^d$, содержащуюся в выпуклой оболочке полюсов. Если при этом значения $\mathbf{a}_p$ были получены исходя из интерполяционных условий (2), то построенная ломаная будет проходить через точки $\mathbf{x}(l)$.

Пусть $r = 2$, $m = 12$, $n = 16$. На рис. 1 изображены точки интерполяции с порядковыми номерами и значения дискретного периодического сплайна, а на рис. 2 — ломаная, полученная путём соединения соседних точек сплайна отрезками.

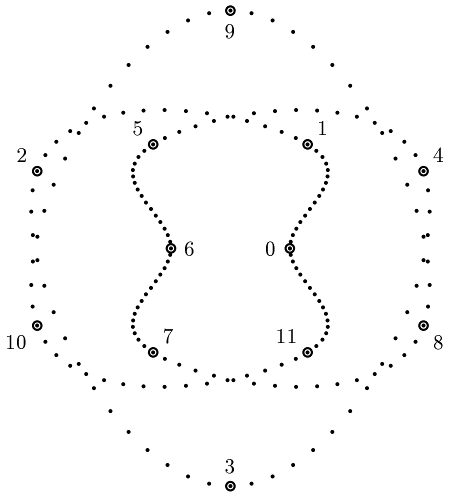

Рис. 1. Точки интерполяции и значения сплайна

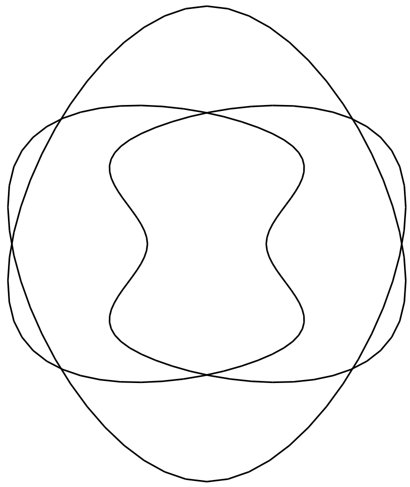

Рис. 2. Замкнутая ломаная

В § 3 приведён эффективный алгоритм вычисления значений дискретных периодических сплайнов. Обозначим

$$\mathbf{S}_1(j) = \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{a}_p\, \widetilde{Q}_{1,n}(j - pn),$$

$$\mathbf{S}_\nu(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_{1,n}(k)\, \mathbf{S}_{\nu-1}(j-k), \quad \nu = 2, 3, \ldots.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Справедливо равенство* $\mathbf{S} = \mathbf{S}_r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для сплайна первого порядка справедлива формула*

$$\mathbf{S}_1(ln + k) = \mathbf{a}_l + \tfrac{k}{n} \Delta \mathbf{a}_l, \qquad k \in 0 : n-1, \quad l \in 0 : m-1. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_0$.

Обратимся к вопросу о вычислении циклической свёртки

$$\mathbf{y}(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{Q}_{1,n}(k)\, \mathbf{x}(j-k),$$

где $\mathbf{x}(j) = \bigl(x^1(j), x^2(j), \ldots, x^d(j)\bigr)$ — векторный N-периодический сигнал. Зафиксируем $j \in 0 : N-1$ и введём обозначения

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{x}(j), \quad \mathbf{d}_k = \mathbf{x}(j-k) + \mathbf{x}(j+k) \quad \text{при } k \in 1 : n-1.$$

Построим последовательность векторов $\{\mathbf{h}_k\}$ по правилу

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{d}_k + \mathbf{h}_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad \mathbf{h}_{-1} = 0.$$

В § 3 доказано, что

$$\mathbf{y}(j) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{h}_k. \tag{4}$$

Итак, для вычисления значений дискретного периодического сплайна $\mathbf{S}(j)$ порядка r потребуется найти значения $\mathbf{S}_1(j)$, используя формулу (3), и последовательно вычислить значения сплайнов $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$,…, $\mathbf{S}_r$, используя схему (4). При этом количество выполняемых операций сложения пропорционально rnN, а умножения — rN.

Зафиксируем натуральные числа r и m, $m \geqslant 2$, и набор векторов $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$ из $\mathbb{R}^d$. Для натурального n, отличного от единицы, построим дискретный периодический сплайн с векторными коэффициентами

$$\mathbf{S}_{r,n}(j) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}_n(l)\, \widetilde{Q}_{r,n}(j - ln), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Значения сплайна $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ образуют множество из mn точек пространства $\mathbb{R}^d$. В § 4 показано, как найти предел этого множества при $n \to \infty$.

Определим периодический B-сплайн первого порядка как m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде $[0, m]$ задаётся формулой

$$P_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{при } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t - m + 1, & \text{при } t \in (m-1, m]. \end{cases}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s)\, P_1(t-s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \ldots .$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Коэффициенты интерполяционных сплайнов* (5) *сходятся:*

$$\mathbf{c}_n(l) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{c}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Если положить

$$\mathbf{S}_r(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l)\, P_r(t-l), \qquad t \in \mathbb{R},$$

то

$$\max_{j\,\in\,0\,:\,N-1} \left\| \mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r\left(\tfrac{j}{n}\right) \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Предельный сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ принадлежит пространству C^{2r-2}. Геометрически теорема 4.1 означает, что ломаные, определяемые дискретными сплайнами $\mathbf{S}_{r,n}$, сходятся при неограниченном увеличении n к кривой, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &\int_0^m \left\| \mathbf{f}^{(r)}(t) \right\|^2 dt \to \min, \\ &\mathbf{f}(l) = \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m-1, \\ &\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r. \end{aligned} \tag{6}$$

где $\widetilde{\mathbf{W}}_2^r$ — пространство m-периодических вектор-функций $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, у которых r-я производная суммируема с квадратом на основном периоде $[0, m]$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Предельный сплайн* $\mathbf{S}_r(t)$ *является единственным решением задачи* (6).

В § 5 исследуется интерполяционная задача для дискретных периодических функций, в которой кроме значений функции заданы также направления в точках интерполяции.

Обозначим через $\mathbf{D}_{r,n}$ пространство вектор-функций целочисленного аргумента вида

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\, b_{2r,N}(j - pn + r) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\, b_{2r,N}(j - pn + r - 1),$$

где $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1(p)$, $\mathbf{c}_2(p)$ — векторные коэффициенты из $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{p=0}^{m-1} \big(\mathbf{c}_1(p) + \mathbf{c}_2(p) \big) = 0.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{D}_{r,n}$ интерполяционную задачу

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(ln) &= \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta\mathbf{S}(ln) &= \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{x}(l)$, $\mathbf{y}(l)$ — произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Интерполяционная задача* (7) *имеет решение и оно единственно.*

В диссертации описан эффективный метод нахождения такого решения.

Сформулируем экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \left\| \Delta^r \mathbf{f}(j) \right\|^2 &\to \min, \\ \mathbf{f}(ln) = \mathbf{x}(l), &\qquad l \in 0 : m-1, \\ \Delta\mathbf{f}(ln) = \mathbf{y}(l), &\qquad l \in 0 : m-1, \\ \mathbf{f}(j + N) = \mathbf{f}(j), &\qquad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 5.3. *Единственным решением задачи* (8) *является интерполяционная вектор-функция* $\mathbf{S}_*$ *из* $\mathbf{D}_{r,n}$.

Вектор-функции из пространства $\mathbf{D}_{r,n}$ можно использовать для построения замкнутых кривых. Пусть заданы наборы векторов

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1) \in \mathbb{R}^d.$$

Найдём вектор-функцию $\mathbf{S}(j)$, являющуюся решением интерполяционной задачи (7). Соединим отрезками соседние точки $\mathbf{S}(j)$, $\mathbf{S}(j+1)$ при $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную в пространстве $\mathbb{R}^d$. Эта ломаная будет проходить через заданные точки $\mathbf{x}(l)$ и иметь в этих точках заданные направления $\mathbf{y}(l)$.

Положим $r = 3$, $d = 2$. На рисунках 3 и 4 изображены ломаные с вершинами $\mathbf{S}(j)$. Векторы $\mathbf{x}(l)$ показаны кружками, направления векторов $\mathbf{y}(l)$ указаны пунктирными стрелками. Параметр n равен 20.

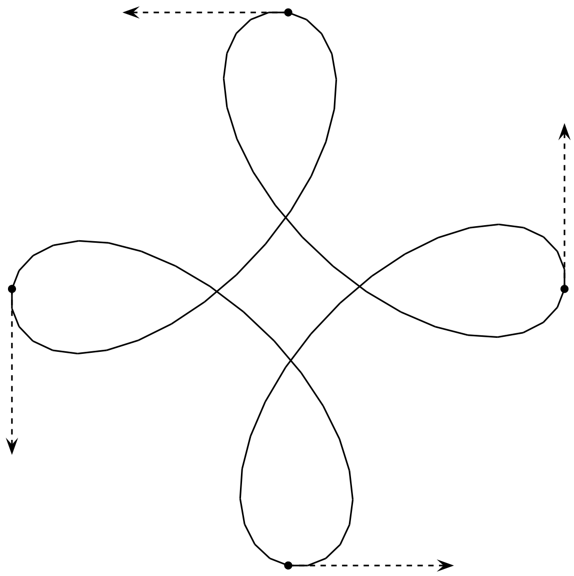

Рис. 3. $m = 4$

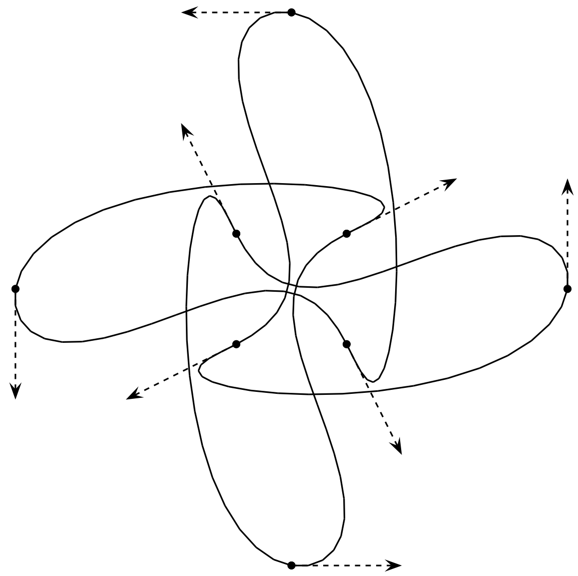

Рис. 4. $m = 8$

Пусть r и m — натуральные числа, отличные от единицы. Пусть заданы также наборы векторов

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(m-1) \in \mathbb{R}^d.$$

Согласно теореме 5.1 для каждого натурального n, отличного от единицы, найдётся вектор-функция $\mathbf{S}_{r,n}$ из пространства $\mathbf{D}_{r,n}$, являющаяся решением интерполяционной задачи

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1,$$

$$\Delta\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \frac{\mathbf{y}(l)}{n}, \qquad l \in 0 : m-1.$$

В § 6 исследуется поведение множества точек $\{\mathbf{S}_{r,n}(j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ при неограниченном увеличении n.

Определим последовательность функций $\beta_\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, периодических с периодом 1. Функцию $\beta_1(t)$ на основном периоде зададим формулой

$$\beta_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,, & \text{при } t = 0, \\ \frac{1}{2} - t, & \text{при } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

Остальные функции $\beta_\nu(t)$ на основном периоде определим при помощи рекуррентного соотношения

$$\beta_{\nu+1}(t) = \int_0^t \beta_\nu(\tau)\,d\tau + \int_0^1 \tau\,\beta_\nu(\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0, 1].$$

В § 6 показано, как найти векторные коэффициенты $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1(p)$, $\mathbf{c}_2(p)$ таким образом, чтобы сплайн

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_1(p)\,\beta_{2r-1}\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr) + \sum_{p=0}^{m-1} \mathbf{c}_2(p)\,\beta_{2r}\bigl(\tfrac{t-p}{m}\bigr)$$

был пределом дискретных интерполяционных сплайнов $\mathbf{S}_{r,n}$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Справедливы предельные соотношения*

$$\max_{j\,\in\,0:N-1} \Bigl\| \mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r\bigl(\tfrac{j}{n}\bigr) \Bigr\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\max_{j\,\in\,0:N-1} \Bigl\| n\,\boldsymbol{\Delta} S_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r'\bigl(\tfrac{j}{n}\bigr) \Bigr\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Предельный сплайн $\mathbf{S}_r$ принадлежит пространству C^{2r-3}. Геометрический смысл теоремы 6.2 заключается в том, что замкнутые ломаные, соответствующие дискретным вектор-функциям $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ сходятся при неограниченном увеличении n к кривой, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} &\int_0^m \bigl\|\mathbf{f}^{(r)}(t)\bigr\|^2\,dt \to \min, \\ &\mathbf{f}(l) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ &\mathbf{f}'(l) = \mathbf{y}(l), \qquad l \in 0 : m-1, \\ &\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{W}}_2^r. \end{aligned} \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 6.3. *Предельный сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ является единственным решением экстремальной задачи* (9).

Вторая глава диссертации посвящена поверхностям Кунса и их обобщениям.

В § 7 рассматриваются билинейные и бикубические поверхности Кунса. Пусть заданы непрерывные вектор-функции

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3,$$

для которых справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(0) &= \mathbf{g}_1(0), \qquad & \mathbf{f}_1(1) &= \mathbf{g}_2(0), \\ \mathbf{f}_2(0) &= \mathbf{g}_1(1), \qquad & \mathbf{f}_2(1) &= \mathbf{g}_2(1). \end{aligned}$$

Кривые, соответствующие заданным вектор-функциям, образуют криволинейный четырёхугольник в пространстве $\mathbb{R}^3$. Билинейная поверхность Кунса определяется формулой

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(u,v) = H_1(u)\mathbf{f}_1(v) + H_2(u)\,\mathbf{f}_2(v) + H_1(v)\mathbf{g}_1(u) + H_2(v)\,\mathbf{g}_2(u) - \\ - \big[H_1(u)H_1(v)\,\mathbf{g}_1(0) + H_1(u)\,H_2(v)\,\mathbf{g}_2(0) + H_2(u)\,H_1(v)\,\mathbf{g}_1(1) + H_2(u)\,H_2(v)\,\mathbf{g}_2(1)\big],\end{aligned}$$

где $H_1(t) = 1 - t$, $H_2(t) = t$. Функции H_1 и H_2 называются *смешивающими функциями*. Для вектор-функции $\mathbf{c}(u,v)$ выполняются тождества

$$\begin{aligned}&\mathbf{c}(0,v) = \mathbf{f}_1(v), \quad \mathbf{c}(1,v) = \mathbf{f}_2(v), \qquad v \in [0,1],\\ &\mathbf{c}(u,0) = \mathbf{g}_1(u), \quad \mathbf{c}(u,1) = \mathbf{g}_2(u), \qquad u \in [0,1].\end{aligned}$$

Геометрический смысл этих условий в том, что граница поверхности Кунса совпадает с заданным криволинейным четырёхугольником.

Далее в § 7 вводятся бикубические поверхности Кунса, которые интерполируют не только значения, но и производные на границе четырёхугольной области. Показывается, как составить поверхность тора из четырёх поверхностей Кунса со специальным образом заданными смешивающими функциями.

В § 8 показано, как можно обобщить понятие поверхности Кунса. Пусть D_u — непустое множество, T_u — некоторое линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции над D_u. Кроме того, пусть задан набор линейных функционалов $L_1^u, \ldots, L_m^u \colon T_u \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^u, \ldots, H_m^u$ из T_u, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^u(H_j^u) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : m.$$

Аналогично, пусть задано непустое множество D_v, линейное пространство T_v, состоящее из вещественных функций над D_v, набор линейных функционалов $L_1^v, \ldots, L_n^v \colon T_v \to \mathbb{R}$ и набор функций $H_1^v, \ldots, H_n^v$ из T_v, удовлетворяющих соотношениям

$$L_i^v(H_j^v) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in 1 : n.$$

Функции H_i^u, H_j^v будем называть смешивающими функциями.

Определим множества вектор-функций, координатные функции которых принадлежат T_u и T_v :

$$\mathbf{T}_u = \Big\{\mathbf{g}\colon D_u \to \mathbb{R}^d \;\big|\; \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^d(u)\big),\; g^k \in T_u\Big\},$$

$$\mathbf{T}_v = \Big\{\mathbf{f}\colon D_v \to \mathbb{R}^d \;\big|\; \mathbf{f}(v) = \big(f^1(v), \ldots, f^d(v)\big),\; f^k \in T_v\Big\}.$$

Введём линейные операторы

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}) = \big(L_i^u(g^1), \ldots, L_i^u(g^d)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{g}(u) = \big(g^1(u), \ldots, g^d(u)\big) \in \mathbf{T}_u, i = 1, \ldots, m;\\ \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}) = \big(L_j^v(f^1), \ldots, L_j^v(f^d)\big) \quad \text{для} \quad \mathbf{f}(u) = \big(f^1(u), \ldots, f^d(u)\big) \in \mathbf{T}_v, j = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Пусть заданы наборы вектор-функций

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \in \mathbf{T}_v, \qquad \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{T}_u,$$

удовлетворяющих условиям согласования

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_j^v(\mathbf{f}_i), \qquad i \in 1 : m, \quad j \in 1 : n.$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{c} : D_u \times D_v \to \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=1}^{n} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{L}_i^u(\mathbf{g}_j). \tag{10}$$

Множество точек $\{\mathbf{c}(u,v) \mid u \in D_u,\, v \in D_v\}$ пространства $\mathbb{R}^d$ назовём *обобщённой поверхностью Кунса*, построенной по *опорным вектор-функциям* $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$.

ТЕОРЕМА 8.1. *Вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *задаваемая формулой* (10), *удовлетворяет условиям*

$$\mathbf{L}_i^u(\mathbf{c}(\cdot,v)) = \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 1:m, \quad v \in D_v,$$
$$\mathbf{L}_j^v(\mathbf{c}(u,\cdot)) = \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 1:n, \quad u \in D_u.$$

Билинейные и бикубические поверхности Кунса, а также поверхности Гордона являются частными случаями обобщённой поверхности Кунса.

В § 9 вводятся дискретные поверхности Кунса. Пусть $N_1 = m_1 n_1$, $N_2 = m_2 n_2$, где m_1, n_1 и m_2, n_2 — натуральные числа, отличные от единицы. Положим $D_u = D_v = \mathbb{Z}$. Определим пространство T_u как множество всех N_1-периодических, а T_v — как множество всех N_2-периодических вещественных функций над $\mathbb{Z}$. Зададим функционалы L_i^u и L_j^v формулами

$$L_i^u(g) = g(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1,$$
$$L_j^v(f) = f(jn_2), \qquad j \in 0 : m_2 - 1.$$

Пусть r_1, r_2 — натуральные числа. Возьмём в качестве смешивающей функции H_0^u фундаментальный дискретный N_1-периодический сплайн порядка r_1, удовлетворяющий условиям

$$H_0^u(kn_1) = \delta_{0,k}, \qquad k \in 0 : m_1 - 1,$$

а в качестве H_0^v — фундаментальный дискретный N_2-периодический сплайн порядка r_2, удовлетворяющий условиям

$$H_0^v(kn_2) = \delta_{0,k}, \qquad k \in 0 : m_2 - 1.$$

Остальные смешивающие функции определим при помощи сдвига:

$$H_i^u(u) = H_0^u(u - in_1), \qquad i \in 1 : m_1 - 1, \quad u \in \mathbb{Z},$$
$$H_j^v(v) = H_0^v(v - jn_2), \qquad j \in 1 : m_2 - 1, \quad v \in \mathbb{Z}.$$

Пусть заданы наборы вектор-функций

$$\mathbf{f}_0, \ldots, \mathbf{f}_{m_1-1}, \mathbf{g}_0, \ldots, \mathbf{g}_{m_2-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d,$$

где вектор-функции $\mathbf{f}_i$ — N_2-периодические, $\mathbf{g}_j$ — N_1-периодические. Условия согласования сведутся к равенствам

$$\mathbf{f}_i(jn_2) = \mathbf{g}_j(in_1), \qquad i \in 0 : m_1 - 1, \quad j \in 0 : m_2 - 1.$$

Формула (10) в этом случае примет вид

$$\mathbf{c}(u,v) = \sum_{i=0}^{m_1-1} H_i^u(u)\,\mathbf{f}_i(v) + \sum_{j=0}^{m_2-1} H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(u) - \sum_{i=0}^{m_1-1}\sum_{j=0}^{m_2-1} H_i^u(u)\,H_j^v(v)\,\mathbf{g}_j(in_1). \tag{11}$$

Построенная по ней вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ будет удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(u, jn_2) &= \mathbf{g}_j(u), \qquad j \in 0:m_2-1, \qquad u \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{c}(in_1, v) &= \mathbf{f}_i(v), \qquad i \in 0:m_1-1, \qquad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{12}$$

Вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ периодична с периодом N_1 по первому аргументу и с периодом N_2 — по второму. Пусть $d = 3$. Множество значений $\{\mathbf{c}(u,v) \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$ назовём *дискретной поверхностью Кунса*. Строго говоря, вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$ не задаёт поверхность, так как множество её значений — дискретный набор точек в пространстве. Однако можно построить замкнутую многогранную поверхность, состоящую из треугольных граней с вершинами

$$\mathbf{c}(u,v),\ \mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1)$$

и

$$\mathbf{c}(u+1,v),\ \mathbf{c}(u,v+1),\ \mathbf{c}(u+1,v+1)$$

для всех пар u и v. Согласно условиям (12) полученная поверхность будет проходить через все опорные кривые, задаваемые вектор-функциями $\mathbf{f}_i(v)$ и $\mathbf{g}_j(u)$.

Покажем, как построить поверхность, имеющей вид завязанной в узел трубки. Положим $m_1 = 2$, $m_2 = 3$. Кривые $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{f}_1$ идут вдоль трубки, а кривые $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ задают три поперечных сечения трубки (см. рис. 5). Точки пересечений ломаных отмечены кружками. Используются параметры $n_1 = 4$ и $n_2 = 40$, поэтому ломаные $\mathbf{f}_i$ состоят из 120 отрезков, а ломаные $\mathbf{g}_j$ — из 8 отрезков. На рис. 6 показана дискретная поверхность Кунса, построенная по опорным кривым, изображённым на рис. 5, для параметров $r_1 = r_2 = 2$. «Диагональные» рёбра вида $\big[\mathbf{c}(u+1,v), \mathbf{c}(u,v+1)\big]$ скрыты для упрощения рисунка.

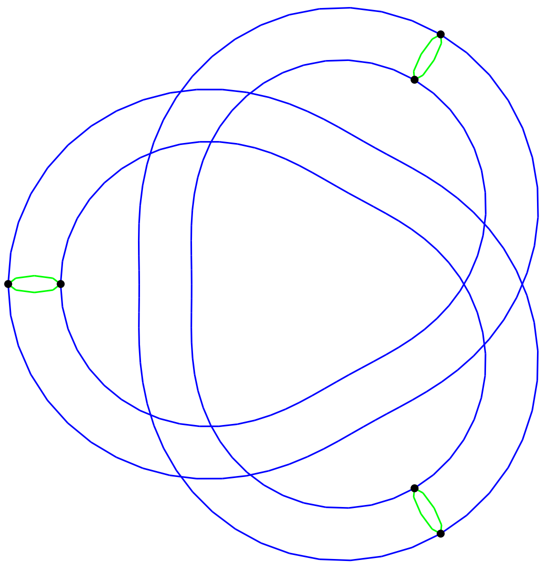

Рис. 5. Опорные кривые

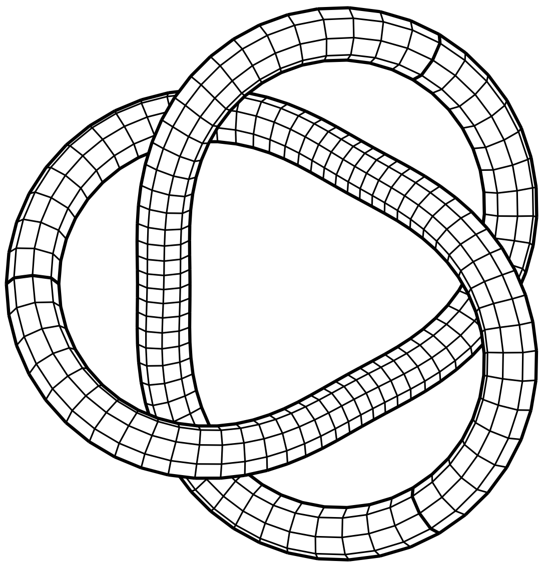

Рис. 6. Дискретная поверхность Кунса

Положим

$$\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v) = \sum_{i=0}^{r_1} (-1)^{r_1-i}\, C_{r_1}^i \sum_{j=0}^{r_2} (-1)^{r_2-j}\, C_{r_2}^j\, \mathbf{a}(u+i, v+j).$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}\sum_{u=0}^{N_1-1}\sum_{v=0}^{N_2-1}\left\|\Delta^{r_1,r_2}\,\mathbf{a}(u,v)\right\|^2\to\min,\\ \mathbf{a}(\cdot,jn_2)=\mathbf{g}_j,\quad j\in 0:m_2-1,\\ \mathbf{a}(in_1,\cdot)=\mathbf{f}_i,\quad i\in 0:m_1-1,\\ \mathbf{a}(u+N_1,v)\equiv\mathbf{a}(u,v+N_2)\equiv\mathbf{a}(u,v).\end{gathered}\tag{13}$$

ТЕОРЕМА 9.1. *Вектор-функция* $\mathbf{c}(u,v)$, *задаваемая формулой* (11), *является единственным решением экстремальной задачи* (13).

В § 10 рассматривается аналог свойства минимальной нормы для обобщённой поверхности Кунса. Устанавливается, что если смешивающие функции обобщённой поверхности являются единственными решениями экстремальных задач определённого вида, то при некоторых дополнительных условиях можно описать экстремальную задачу, единственным решением которой будет обобщённая поверхность Кунса. Свойства минимальной нормы для билинейной, бикубической и дискретной поверхностей оказываются частными случаями доказанной теоремы.

Пусть m_1, m_2 — натуральные числа, отличные от единицы, и задан набор непрерывных m_2-периодических d-мерных вектор-функций $\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{m_1-1}$ и набор непрерывных m_1-периодических d-мерных вектор-функций $\mathbf{g}_0,\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_{m_2-1}$. Предположим, что выполняются равенства

$$\mathbf{f}_i(j)=\mathbf{g}_j(i),\qquad i\in 0:m_1-1,\quad j\in 0:m_2-1.$$

При натуральных n_1 и n_2, отличных от единицы, проведём дискретизацию вектор-функций $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{g}_j$:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{i,n_2}(v)&:=\mathbf{f}_i\big(\tfrac{v}{n_2}\big),\qquad i\in 0:m_1-1,\quad v\in\mathbb{Z};\\ \mathbf{g}_{j,n_1}(u)&:=\mathbf{g}_j\big(\tfrac{u}{n_1}\big),\qquad j\in 0:m_2-1,\quad u\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Положим $N_1=m_1n_1$, $N_2=m_2n_2$. По вектор-функциям $\mathbf{f}_{i,n_2}$, $\mathbf{g}_{j,n_1}$ можно построить дискретную поверхность Кунса $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v)$. Значения вектор-функции $\mathbf{c}_{n_1,n_2}(u,v)$ образуют множество из N_1N_2 точек в пространстве $\mathbb{R}^d$. В § 11 показано, что найдётся вектор-функция $\mathbf{c}(u,v)$, множество значений которой является пределом множеств значений вектор-функций $\mathbf{c}_{n_1,n_2}$ при неограниченном возрастании n_1 и n_2.

ТЕОРЕМА 11.1. *Справедливо предельное соотношение*

$$\mathbf{c}_{n_1,n_2}\big(\lfloor xn_1\rfloor,\lfloor yn_2\rfloor\big)\xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{}\mathbf{c}(x,y)\qquad \text{равномерно по } x,y\in\mathbb{R}.$$

Предельная поверхность $\mathbf{c}(u,v)$ оказывается частным случаем обобщённой поверхности Кунса.

Пусть порядки r_1 и r_2 отличны от единицы и остовные вектор-функции достаточно гладкие:

$$\mathbf{f}_i\in C^{r_2},\quad i\in 0:m_1-1,\qquad \mathbf{g}_j\in C^{r_1},\quad j\in 0:m_2-1.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$
\begin{gathered}
\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\left\|\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a}(x,y)\right\|^2 dy\,dx \to \min,\\
\mathbf{a}(i,y)=\mathbf{f}_i(y),\qquad i\in 0:m_1-1,\qquad y\in\mathbb{R},\\
\mathbf{a}(x,j)=\mathbf{g}_j(x),\qquad j\in 0:m_2-1,\qquad x\in\mathbb{R},\\
\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\,\partial y^{r_2}}\,\mathbf{a}=\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial y^{r_2}\,\partial x^{r_1}}\,\mathbf{a}\in C(\mathbb{R}^2),\\
\mathbf{a}(x+m_1,y)\equiv\mathbf{a}(x,y+m_2)\equiv\mathbf{a}(x,y).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

ТЕОРЕМА 11.2. *Предельная поверхность Кунса* $\mathbf{c}(u,v)$ *является единственным решением задачи* (14).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 19–21.

2. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Параметрические поверхности Кунса* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2008. Вып. 2. С. 16–22.

3. Чашников Н. В. *Составные параметрические поверхности Кунса* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 141–145.

4. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретных периодических сплайнов* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2009-08. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2009/index.html#08`).

5. Чашников Н. В. *Аналог эрмитовой интерполяции в дискретном периодическом случае* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2009-09. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2009/index.html#09`).

6. Чашников Н. В. *Предельные кривые для дискретного аналога эрмитовой сплайн-интерполяции* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2009-11. (`http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2009/index.html#11`).