САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Долгополик Максим Владимирович

НЕОДНОРОДНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт–Петербург

2014

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Негладкий анализ, как раздел математики, изучающий недифференцируемые функции, в первую очередь в связи с теорией негладких экстремальных задач, сформировался во второй половине XX века под влияние работ В.Ф. Демьянова, А.М. Рубинова, Н.З. Шора, Б.Н. Пшеничного, А.Д. Иоффе, Ф. Кларка, Дж. Варги и многих других авторов. Основными инструментами исследования в негладком анализе являются производная по направлениям и субдифференциал, а также их многочисленные обобщения, такие как верхнияя и нижняя производные Кларка, субдифференциал Кларка, проксимальный субдифференциал и субдифференциал Мишеля–Пено. Общим свойством всех обобщений понятий производной по направлениям и субдифференциала является тот факт, что все они определяют некоторую положительно однородную аппроксимацию приращения функции. Одним из наиболее продуктивных методов исследования производных по направлениям негладких функций является метод, основанный на понятии экзостера, поскольку данный метод позволяет выражать удобным образом условия экстремума негладкой функции, а также строить направления спуска и подъёма данной функции. Однако, в негладком случае производная по направлениям, как и её обобщения, не является непрерывной функцией точки, что существенно затрудняет построение эффективных численных методов решения негладких оптимизационных задач. Поэтому В.Ф. Демьянов ввёл понятие кодифференцируемой функции и кодифференциала с помощью которого строится неоднородная аппроксимация приращения негладкой функции. Для очень широкого класса негладких функций кодифференциальное отображение является непрерывным в метрике Хаусдорфа, что позволяет строить эффективные методы недифференцируемой оптимизации на основе понятия кодифференциала. Отметим здесь замечательное свойство метода кодифференциального спуска “выходить” из некоторых точек локального минимума, существенно отличающее данный метод от других методов гладкой и негладкой оптимизации. Ещё одним преимуществом подхода, основанного на кодифференцируемости, является наличие удобного исчисления кодифференцируемых функций, построенного В.Ф. Демьяновым и А.М. Рубиновым, в то время как для большинства обобщений понятия субдифференциала и производной по направлениям не существует полноценного исчисления. Дальнейшим обобщением понятия кодифференциала является понятие верхнего и нижнего коэкзостера с помощью которого также определяется неоднородная аппроксимация приращения функции.

Одной из актуальных задач, стоящих в настоящее время, является дальнейшее развитие теории неоднородных аппроксимаций негладких функций, как одного из наиболее эффективных инструментов исследования негладких задач.

Целью диссертации является построение общей теории неоднородных аппроксимаций негладких функций на основе идей абстрактного выпуклого анализа, развитие теории кодифференцируемости и неоднородных выпуклых аппроксимаций в нормированных пространствах, а также их применение к исследованию различных экстремальных задач.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней развивается общая теория аппроксимаций негладких функций, позволяющая решать различные негладкие экстремальный задачи. В диссертации строится исчисление абстрактных выпуклых аппроксимаций негладких функций, впервые приводятся многочисленные свойства кодифференцируемых функций, а также детально изучается метод кодифференциального спуска и развивается аппарат исчерпывающих семейств неоднородных выпуклых аппроксимаций, являющийся удобным инструментом исследования различных оптимизационных задач.

Практическая значимость работы определяется тем, что в ней разработан общий подход к построению различных аппроксимаций негладких функций и изучению различных экстремальных задач с ограничениями. Кроме того, в диссертации подробно изучены метод кодифференциального спуска и метод спуска, основанный на неоднородных выпуклых аппроксимациях, позволяющие эффективно решать негладкие экстремальные задачи и строить новые численные методы решения гладких оптимизационных задач с ограничениями. Также в диссертации приведены различные приложения к задачам вариационного исчисления.

Научная новизна. Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В диссертации применяются современные методы теории экстремальных задач, негладкого анализа и недифференцируемой оптимизации.

Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту:

- построено исчисление абстрактных выпуклых аппроксимаций негладких функций,
- получены необходимые условия экстремума негладких функций в терминах абстрактных выпуклых аппроксимаций,
- на основе абстрактных выпуклых аппроксимаций указана связь между квазидифференциалом, экзостером, кодифференциалом и коэкзостером,
- понятия кодифференцируемости и коэкзостера обобщены на случай функций, определённых на нормированном пространстве,
- получены многочисленные новые свойства кодифференцируемых функций,

- обобщён и подробно изучен метод кодифференциального спуска,

- построено исчисление исчерпывающих семейств неоднородных верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций негладких функций,

- построен и изучен метод спуска, основанный на неоднородных верхних выпуклых аппроксимациях,

- выведены необходимые условия экстремума в некоторых негладких задачах вариационного исчисления.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на Всероссийской конференции "Устойчивость и процессы управления", посвящённой 80-ти летию со дня рождения В. И. Зубова (г. Санкт–Петербург, 1–2 июля, 2010 г.), международной конференции "Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы (CNSA-2012)" (г. Санкт–Петербург, 18–23 июня 2012 г), международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики" (г. Новосибирск, 5–12 августа, 2012 г), XLI и XLII международных научных конференциях аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость" (г. Санкт–Петербург, 5–8 апреля, 2010 г., 1–2 июля, 2011 г.).

Публикации. По результатам исследований опубликовано 8 печатных работ, три из которых в изданиях, рекомендуемых ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, пяти глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Определения, предложения, теоремы, леммы, следствия, примеры, замечания и формулы нумеруются в соответствии с главой, параграфом, в которых они находятся. Объём работы составляет 135 страниц. Список литературы включает 128 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении приводится обзор литературы по теме работы, обсуждается актуальность исследования, его теоретическая и практическая ценность, научная новизна.

В первой главе приведены основные определения и результаты из топологии, функционального анализа, выпуклого анализа, теории многозначных отображений и негладкого анализа, используемые в следующих главах. Здесь также даются базовые определения и утверждения абстрактного выпуклого анализа. Пусть X — непустое множество, H —

непустое семейство функций $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *H–выпуклой* (*H–вогнутой*), если существует непустое множество $U \subset H$ такое, что

$$f(x) = \sup_{h \in U} h(x) \quad \bigl(f(x) = \inf_{h \in U} h(x)\bigr) \quad \forall x \in X.$$

В случае, когда X является нормированным пространством, а множество H совпадает с множеством всех непрерывных аффинных функций $h\colon X \to \mathbb{R}$, множество всех H–выпуклых функций f совпадает с множеством всех собственных полунепрерывных снизу выпуклых функций, а множество всех H–вогнутых функций f совпадает с множеством всех собственных полунепрерывных сверху вогнутых функций.

В первой главе также приводятся определения квазидифференцируемости, кодифференцируемости, экзостера и коэкзостера и формулируются необходимые условия экстремума в терминах данных аппроксимаций. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *квазидифференцируемой* в точке $x \in \Omega$, если f дифференцируема по направлениям в этой точке и существует пара выпуклых компактов $\underline{\partial} f(x)$, $\overline{\partial} f(x)$ таких, что

$$f'(x,g) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x)} \langle v, g \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x)} \langle w, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n,$$

где $f'(x,\cdot)$ — производная по направлениям функции f в точке x и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что у функции f в точке x существует *верхний экзостер* в смысле Дини, если функция f дифференцируема по направлениям в точке x и существует семейство $E^* f(x)$ выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$f'(x,g) = \min_{C \in E^* f(x)} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *кодифференцируемой* в точке $x \in \Omega$, если существует пара выпуклых компактов $\underline{d} f(x)$, $\overline{d} f(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что для любого допустимого $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ (т. е. $\operatorname{co}\{x, x + \Delta x\} \subset \Omega$) будет

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{(a,v) \in \underline{d} f(x)} (a + \langle v, \Delta x \rangle) + \min_{(b,w) \in \overline{d} f(x)} (b + \langle w, \Delta x \rangle) + o(\Delta x, x),$$

где $o(\alpha \Delta x, x)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$.

Семейство непустых выпуклых компактных подмножеств $\overline{E} f(x)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ называется *верхним коэкзостером* в смысле Дини функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \Omega$, если для любого допустимого $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ будет

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \min_{C \in \overline{E} f(x)} \max_{(a,v) \in C} (a + \langle v, \Delta x \rangle) + o(\Delta x, x)$$

где $o(\alpha \Delta x, x)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$.

В главе 2 вводится понятие абстрактно кодифференцируемой функции и абстрактной выпуклой аппроксимации негладкой функции, строится исчисление абстрактно кодифференцируемых функции, формулируются условия экстремума в терминах введённых аппроксимаций, а также приводится несколько конкретных классов абстрактно кодифференцируемых функций.

Пусть везде далее X — нормированное пространство, Ω — открытое множество, H — непустое множество функций $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Обозначим через $PF(X,H)$ множество, состоящее из всех пар функций (Φ,Ψ) таких, что функция $\Phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ является H–выпуклой, функция $\Psi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ является H–вогнутой и $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\Phi \cap \operatorname{dom}\Psi)$.

Введём бинарное отношение σ на множестве $PF(X,H)$. Пусть $((\Phi_1,\Psi_1),(\Phi_2,\Psi_2)) \in \sigma$ где $(\Phi_i,\Phi_i) \in PF(X,H)$, $i \in \{1,2\}$, тогда и только тогда, когда $\Phi_1(0)+\Psi_1(0) = \Phi_2(0)+\Psi_2(0)$ и для любого $x \in X$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{1}{\alpha}\big(\Phi_1(\alpha x)+\Psi_1(\alpha x)-\Phi_2(\alpha x)-\Psi_2(\alpha x)\big) = 0$$

Бинарное отношение σ является отношением эквивалентности. Множество всех классов эквивалентности $PF(X,H)/\sigma$ обозначим через $EPF(X,H)$. Если $(\Phi,\Psi) \in PF(X,H)$, то обозначим через $[\Phi,\Psi]$ класс эквивалентности элемента (Φ,Ψ) по отношению σ.

Определение 1. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *H–кодифференцируемой* (или абстрактно кодифференцируемой по отношению к множеству H) в точке $x \in \Omega$, если существует элемент $\delta_H f(x) \in EPF(X,H)$ для которого существует пара $(\Phi,\Psi) \in \delta_H f(x)$ такая, что $\Phi(0)+\Psi(0) = 0$ и для любого допустимого $\Delta x \in X$ (т. е. $\operatorname{co}\{x, x+\Delta x\} \subset \Omega \cap \operatorname{dom}\Phi \cap \operatorname{dom}\Psi$) будет

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Phi(\Delta x) + \Psi(\Delta x) + o(\Delta x, x), \tag{1}$$

где $o(\alpha\Delta x, x)/\alpha \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Элемент $\delta f_H(x)$ называется *H–производной* функции f в точке x.

Многие классы негладких функций совпадают с классом H–кодифференцируемых функций для определённых множеств H.

Предложение 1. *Пусть $X = \mathbb{R}^d$, множество H состоит из всех линейных функционалов на X и функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ произвольна. Тогда f является H–кодифференцируемой в точке $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда она квазидифференцируема в этой точке.*

Предложение 2. *Пусть $X = \mathbb{R}^d$, множество H состоит из всех сублинейных (суперлинейных) функций $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ произвольна. Тогда f является H–гипердифференцируемой в точке $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда существует верхний экзостер функции f в точке x.*

Предложение 3. *Пусть $X = \mathbb{R}^d$, множество H состоих из всех аффинных функций $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ произвольна. Тогда f является H–кодифференцируемой в точке $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда f кодифференцируема в данной точке.*

Предложение 4. *Пусть $X = \mathbb{R}^d$, множество H состоит из всех выпуклых функций $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ произвольна. Тогда f является H–гипердифференцируемой в точке $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда существует верхний коэкзостер функции f в этой точке такой, что*

$$0 \in \operatorname{int} \bigcap_{C \in \overline{E} f(x)} \operatorname{dom} h_C, \quad h_C(\cdot) = \max_{(a,v) \in C} (a + \langle v, \cdot \rangle) \quad \forall C \in \overline{E} f(x). \tag{2}$$

С помощью понятия абстрактной кодифференцируемости можно получать удобные необходимые условия экстремума в задачах математического программирования. Напомним, что функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $f(0) = 0$ называется субоднородной, если для любых $x \in X$ и $\alpha \in (0,1)$ будет $f(\alpha x) \leqslant \alpha f(x)$.

Теорема 1. *Пусть $A \subset \Omega$ — выпуклое множество, $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ являются H–кодифференцируемыми в точке $x^* \in A$, $i \in I_0 = I \cup \{0\}$, $I = \{1, \ldots, n\}$. Предположим также, что для любых h, $p \in H$ сумма $h + p$ корректно определена и x^* является точкой локального минимума в задаче*

$$f_0(x) \to \inf, \quad x \in A, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I.$$

Тогда для любых $(\Phi_i, \Psi_i) \in \delta_H f_i(x^*)$ и $p_i \in H$, $i \in I_0$, таких, что $p_i \geqslant \Psi_i$, $p_i(0) = \Psi_i(0)$ и функция

$$g(\cdot) = \sup\{\Phi_0(\cdot) + p_0(\cdot), \Phi_1(\cdot) + p_1(\cdot) + f_1(x^*), \ldots, \Phi_n(\cdot) + p_n(\cdot) + f_n(x^*)\}$$

субоднородна, ноль является точкой глобального минимума функции g на множестве $A - x^*$.

Далее исследуются два конкретных класса абстрактно кодифференцируемых функций. **В главе 3** изучаются кодифференцируемые функции, определённые на нормированном пространстве, строится исчисление кодифференцируемых функций, а также выводятся необходимые условия экстремума и различные свойства данных функций.

Определение 2. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется кодифференцируемой в точке $x \in \Omega$, если существуют собственная полунепрерывая снизу выпуклая функция $\Phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ и собственная полунепрерывная сверху выпуклая функция $\Psi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\Phi \cap \operatorname{dom}\Psi)$, $\Phi(0) + \Psi(0) = 0$, функции Φ и Ψ непрерывны в нуле и для любого допустимого $\Delta x \in X$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Phi(\Delta x) + \Psi(\Delta x) + o(\Delta x, x),$$

где $o(\alpha\Delta x, x)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$.

В следующем предложении указан другой подход к определению кодифференцируемости.

Предложение 5. *Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ является кодифференцируемой в точке $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда существуют выпуклые ограниченные и компактные в топологии $\tau \times w^*$ множества $A, B \subset \mathbb{R} \times X^*$ такие, что $\max_{(a,\varphi)\in A} a = \min_{(b,\psi)\in B} b = 0$ и для любого допустимого $\Delta x \in X$ будет*

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{(a,\varphi)\in A}(a + \varphi(\Delta x)) + \min_{(b,\psi)\in B}(b + \psi(\Delta x)) + o(\Delta x, x),$$

где $o(\alpha\Delta x, x)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$. Здесь τ — стандартная топология вещественной прямой, w^* — слабая* топология на X^*.

Пара множеств $Df(x) = [A, B]$, фигурирующая в предыдущем предложении, называется кодифференциалом функции f в точке x, множество $\underline{d}f(x) = A$ называется гиподифференциалом функции f в точке x, а множество $\overline{d}f(x) = B$ называется гипердифференциалом функции f в этой точке.

Наиболее важную роль в приложениях играют непрерывно кодифференцируемые функции.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *непрерывно кодифференцируема* в точке $x \in \Omega$, если f кодифференцируема в некоторой окрестности точки x и существует кодифференциальное отображение $y \to Df(y)$ определённое в некоторой окрестности точки x такое, что многозначные отображения $x \to \underline{d}f(x)$ и $x \to \overline{d}f(x)$ непрерывны по Хаусдорфу в точке x.

Множество всех непрерывно кодифференцируемых функций образует векторную решётку замкнутую относительно операции поточечного умножения функций.

Справедливы следующие необходимые условия экстремума в терминах кодифференцируемых функций.

Теорема 2. *Пусть $A \subset \Omega$ — замкнутое выпуклое множество, функции $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ являются кодифференцируемыми в точке $x^* \in A$, $i \in I_0 = \{0\} \cup I$, $I = \{1, \ldots, n\}$. Предположим, что x^* является точкой локального минимума в задаче*

$$f_0(x) \to \inf, \quad x \in A, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I.$$

Тогда для любых $(0, \psi_i) \in \overline{d} f_i(x)$, $i \in R(x^*)$, будет

$$\Big(\operatorname{co} \bigcup_{i \in R(x^*)} (\underline{d} f_i(x^*) + \{(0, \psi_i)\}) \Big) \cap (\{0\} \times (-N(A, x^*))) \neq \varnothing,$$

где $R(x^*) = \{0\} \cup \{i \in I \mid f_i(x^*) = 0\}$.

Далее исследуются различные свойства кодифференцируемых функций и, в частности, доказываются аналог классической теоремы Лагранжа о среднем значении и утверждение о локальной липшицевости непрерывно кодифференцируемой функции.

Теорема 3. *Пусть функция $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ кодифференцируема на множестве Ω. Тогда для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $\operatorname{co}\{x_1, x_2\} \subset \Omega$ существует $\theta \in (0, 1)$ для которого существуют $(0, \varphi) \in \underline{d} f(x_1 + \theta(x_2 - x_1))$ и $(0, \psi) \in \overline{d} f(x_1 + \theta(x_2 - x_1))$ такие, что $f(x_2) - f(x_1) = (\varphi + \psi)(x_2 - x_1)$.*

Предложение 6. *Пусть функция $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ кодифференцируема на множестве Ω. Пусть также $S \subset \Omega$ — выпуклое множество такое, что кодифференциал функции f ограничен на множестве S. Тогда функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве S. В частности, если функция f непрерывно кодифференцируема, то она локально липшицева.*

Предлагается теоретическая схема метода нахождения стационарных точек кодифференцируемой функции, определённой на нормированном пространстве, обобщающая соответствующий метод для конечномерных задач.

Пусть функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ кодифференцируема на X. Зафиксируем любые $\mu > 0$ и $1 < p < +\infty$. Положим $\|(a, \varphi)\|_p = (|a|^p + \|\varphi\|^p)^{\frac{1}{p}}$ для всех $(a, \varphi) \in \mathbb{R} \times X^*$. Для любого $x \in X$ определим множество

$$\overline{d}_\mu f(x) = \{w \in \overline{d} f(x) \mid w = (b, \psi),\ 0 \leqslant b \leqslant \mu\},$$

а для любого $w \in \overline{d}_\mu f(x)$ положим $L(x_k, w) = \underline{d} f(x_k) + \{w\}$.

Теоретическая схема метода кодифференциального спуска задаётся следующим образом.

1. Выбрать $x_0 \in X$.

2. k-ая итерация ($k \geqslant 0$)

   (a) Вычислить $\underline{d}f(x_k)$, $\overline{d}f(x_k)$ и $\overline{d}_\mu f(x_k)$.

   (b) Для каждого $w \in \overline{d}_\mu f(x)$ найти $(a_k(w), \varphi_k(\cdot; w)) \in L(x_k, w)$ такое, что
$$\inf_{(a,\varphi)\in L(x_k,w)} \|(a,\varphi)\|_p = \|(a_k(w), \varphi_k(\cdot; w))\|_p.$$

   (c) Для каждого $w \in \overline{d}_\mu f(x)$ вычислить $\Delta x_k(w) \in X$ такое, что
$$\inf_{\Delta x \in S_X} \varphi_k(\Delta x; w) = \varphi_k(\Delta x_k(w); w)$$
   (если $\varphi_k(\cdot; w) = 0$, то положим $\Delta x_k(w) = 0$).

   (d) Для каждого $w \in \overline{d}_\mu f(x)$ вычислить $\alpha_k(w)$ по правилу
$$\inf_{\alpha \geqslant 0} f(x_k + \alpha \Delta x_k(w)) = f(x_k + \alpha_k(w) \Delta x_k(w)),$$

   (e) Выбрать $\Delta x_k \in X$ и $\alpha_k \in [0, +\infty)$ по правилу
$$\inf_{w \in \overline{d}_\mu f(x_k)} f(x_k + \alpha_k(w) \Delta x_k(w)) = f(x_k + \alpha_k \Delta x_k)$$
   и положить $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x_k$.

В результате применения данного метода получим последовательность такую, что $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что несмотря на выполнение данного условия направление $x_{k+1} - x_k$ может и не быть направлением спуска функции f в точке x_k. В этом направлении функция может сначала возрастать, а потом убывать. Поэтому метод кодифференциального спуска позволяет "выходить" из некоторых точек локального минимума.

Справедлива следующая теорема о стационарности предельных точек последовательности, построенной по методу кодифференциального спуска.

Теорема 4. *Пусть X — строго выпуклое рефлексивное нормированное пространство, функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируема на X и $\inf_{x\in X} f(x) > -\infty$. Предположим также, что последовательность $\{x_k\}$, построенная по методу кодифференциального спуска для функции f, сходится к точке $x^* \in X$, а функция f равномерно кодифференцируема в некоторой окрестности точки x^*. Тогда точка x^* является стационарной точкой функции f на X. Если, кроме того, f выпукла, то x^* — точка глобального минимума функции f.*

В Главе 4 изучаются исчерпывающие семейства неоднородных верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций негладких функций, строится исчисление данных семейств, выводятся различные условия экстремума в терминах неоднородных верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций. Семейства неоднородных верхних выпуклый аппроксимаций (далее неодн. в.в.а.) представляют собой обобщения понятий коэкзостера и H–гипердифференцируемости в случае, когда множество H состоит из собственных полунепрерывных снизу выпуклых функций.

Определение 4. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Полунепрерывная снизу собственная выпуклая функция $\varphi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *слабой неодн. в.в.а.* функции f в точке x, если выполнены условия:

1. $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ и $\varphi(0) \geqslant 0$,

2. для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}(x, r) \subset \Omega$ и

$$f(x + \Delta x) \leqslant f(x) + \varphi(\Delta x) + \varepsilon\|\Delta x\| \quad \forall \Delta x \in \mathcal{O}(0, r).$$

Определение 5. Семейство слабых неодн. в.в.а. $\{\varphi_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, функции f в точке x будем называть *исчерпывающим*, если для любого допустимого $\Delta x \in X$ будет

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \inf_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(\Delta x) + o(\Delta x)$$

где $\inf_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(0) = 0$ и $o(\alpha\Delta x)/\alpha \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

Справедливы следующие необходимые условия экстремума в терминах неодн. в.в.а. негладкой функции.

Теорема 5. *Пусть $A \subset \Omega$ — замкнутое выпуклое множество, $\{\varphi_{\lambda_i}\}$, $\lambda_i \in \Lambda_i$ — семейство слабых неодн. в.в.а. функции $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ в точке $x^* \in A$, $i \in I_0 = \{0\} \cup I$, $I = \{1, \ldots, n\}$. Предположим, что точка x^* является точкой локального минимума в задаче*

$$f_0(x) \to \inf, \quad x \in A, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I.$$

Тогда для любых φ_{λ_i} таких, что $\varphi_{\lambda_i}(0) = 0$, $i \in R(x^*)$ будет

$$\Big(\operatorname{co} \bigcup_{i\in R(x^*)} \underline{\partial}\varphi_{\lambda_i}(0)\Big) \cap (-N(A, x^*)) \neq \varnothing,$$

где $R(x^*) = \{0\} \cup \{i \in I \mid f_i(x^*) = 0\}$.

Теорема 6. *Пусть семейство $\{\varphi_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, является исчерпывающим семейством слабых неодн. в.в.а. функции f в точке x^* и предположим, что x^* — точка локального максимума функции f. Тогда для любого $\Delta x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что $p(\Delta x) \leqslant \varepsilon$ для всех $p \in \underline{\partial}\varphi_\lambda(0)$.*

Замечание 1. В случае когда множество Λ конечно, необходимым условиям максимума в терминах неодн. в.в.а можно придать геометрически наглядную форму. А именно, пусть конечное семейство $\{\varphi_k\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, является исчерпывающим семейством слабых неодн. в.в.а. функции f в точке x^* и предположим, что x^* — точка локального максимума функции f. Тогда для любого $y \in X$ существуют k, $m \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что

$$p(y) \leqslant 0 \leqslant q(y) \quad \forall p \in \underline{\partial}\varphi_k(0), \ \forall q \in \underline{\partial}\varphi_m(0).$$

т. е. для любого линейного непрерывного функционала $\Phi \in X^{**}$, входящего в образ канонического вложения X в X^{**}, существуют k, $m \in \Lambda$ такие, что Φ разделяет выпуклые множества $\underline{\partial}\varphi_k(0)$ и $\underline{\partial}\varphi_m(0)$.

Предлагается метод спуска, основанный на неоднородных верхних выпуклых аппроксимациях. Данный метод является обобщением метода кодифференциального спуска Пусть функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ произвольна. Предположим, что существует семейство функций $\varphi_\lambda \colon X \times X \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, такое, что для любых $\lambda \in \Lambda$ и $x \in X$ функция $\varphi_\lambda(x, \cdot)$ является слабой неодн. в.в.а. функции f в точке x, и для любого $\lambda \in \Lambda$ существует непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $C_\lambda \colon X \rightrightarrows \mathbb{R} \times X^*$ такое, что для любого $x \in X$ множество $C_\lambda(x)$ выпукло и компактно в топологии $\tau \times w^*$ и

$$\varphi_\lambda(x, y) = \max_{(a,p) \in C_\lambda(x)} (a + \varphi(y)) \quad \forall y \in Y,$$

где, как и выше, τ — стандартная топология на $\mathbb{R}$, w^* — слабая* топология на X^*.

Зафиксируем любые $\mu > 0$ и $1 < r < +\infty$. Напомним, что $\|(a,p)\|_r = (|a|^r + \|p\|^r)^{\frac{1}{r}}$ для всех $(a,p) \in \mathbb{R} \times X^*$. Для любого $x \in X$ определим множества

$$\Lambda_\mu(x) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi_\lambda(x, 0) \leqslant \mu\}, \quad \Lambda_0(x) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi_\lambda(x, 0) \leqslant 0\}.$$

Мы будем предполагать, что для любого $x \in X$ множество $\Lambda_0(x)$ непусто.

Теоретическая схема метода спуска имеет следующий вид:

1. Выбрать $x_0 \in X$.

2. k-ая итерация ($k \geqslant 0$)

   (a) Для каждого $\lambda \in \Lambda_\mu(x_k)$ найти $(a_k(\lambda), p_k(\cdot; \lambda)) \in C_\lambda(x_k)$ такое, что

$$\inf_{(a,p) \in C_\lambda(x_k)} \|(a,p)\|_r = \|(a_k(\lambda), p_k(\cdot; \lambda))\|_r.$$

(b) Для каждого $\lambda \in \Lambda_\mu(x_k)$ вычислить $\Delta x_k(\lambda) \in X$ такое, что

$$\inf_{\Delta x \in S_X} p_k(\Delta x; \lambda) = p_k(\Delta x_k(\lambda); \lambda)$$

(если $p_k(\cdot; \lambda) = 0$, то положим $\Delta x_k(\lambda) = 0$).

(c) Для каждого $\lambda \in \Lambda_\mu(x_k)$ вычислить $\alpha_k(\lambda)$ по правилу

$$\inf_{\alpha \geqslant 0} f(x_k + \alpha \Delta x_k(\lambda)) = f(x_k + \alpha_k(\lambda) \Delta x_k(\lambda)),$$

(d) Выбрать $\Delta x_k \in X$ и $\alpha_k \in [0, +\infty)$ по правилу

$$\inf_{\lambda \in \Lambda_\mu(x_k)} f(x_k + \alpha_k(\lambda) \Delta x_k(\lambda)) = f(x_k + \alpha_k \Delta x_k)$$

и положить $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x_k$.

Предложенный метод действительно является методом спуска, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ будет $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. При некоторых дополнительных предположениях на семейство $\{\varphi_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, справедлива теорема о стационарности предельных точек последовательности, построенной по методу спуска.

Теорема 7. *Пусть X — строго выпуклое рефлексивное нормированное пространство и $\inf_{x \in X} f(x) > -\infty$. Предположим также, что существует предельная точка $x^* \in X$ последовательности $\{x_k\}$ построенной по методу спуска для функции f. Тогда в точке x^* выполнены необходимые условия минимума, указанные в теореме 5.*

С помощью предложенного выше метода спуска можно упростить метод кодифференциального спуска для определённого класса кодифференцируемых функций.

Определение 6. Пусть функция $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируема на Ω. Будем говорить, что гипердифференциал функции f разложим на множестве Ω, если существует кодифференциальное отображения функции f на множестве Ω такое, что

$$\overline{d} f(x) = \operatorname{co}\{(b_j(x), q_j(\cdot; x)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid j \in J\},$$

где $J = \{1, \ldots, s\}$, а отображения $x \to (b_j(x), q_j(\cdot; x))$ непрерывны, $j \in J$.

Пусть функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируема на X и гипердифференциал функции f разложим. Определим $\Lambda = J = \{1, \ldots, s\}$ и для каждой пары $(b_j(x), q_j(\cdot; x)) \in \mathbb{R} \times X^*$, $j \in J = \{1, \ldots, s\}$, где отображения $x \to (b_j(x), q_j(\cdot; x))$, $j \in J$, входят в определение разложимости гипердифференциала, положим

$$C_j(x) = \underline{d} f(x) + \{(b_j(x), q_j(\cdot; x))\}, \quad \varphi_j(x, y) = \max_{(a,p) \in C_j(x)} (a + p(y)) \quad \forall y \in X.$$

Семейство $\{\varphi_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяет всем предположения указанным выше. Поэтому к функции f можно применить метод спуска, который в данном случае естественно называть модифицированным методом кодифференциального спуска. Данный метод, по существу, совпадает с методом кодифференциального спуска, с той лишь разницей, что вместо множества $\overline{d}_\mu f(x)$ в данном методе используется множество

$$\{(b_j(x), q_j(\cdot; x)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid b_j(x) \leqslant \mu, \ j \in J\},$$

которое по определению является конечным.

Справедлива следующая теорема о стационарности предельных точек последовательности, построенной по модифицированному методу кодифференциального спуска.

Теорема 8. *Пусть X — строго выпуклое рефлексивное нормированное пространство, функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируема на X, гипердифференциал функции f разложим на X и $x^* \in X$ является предельной точкой последовательности, построенной по модифицированному методу кодифференциального спуска. Предположим также, что $\inf_{x \in X} f(x) > -\infty$ и функция f равномерно кодифференцируема в некоторой окрестности точки x^*. Тогда x^* является стационарной точкой функции f.*

В Главе 5 рассматриваются приложения разработанной теории к некоторым негладким задачам вариационного исчисления. В данной главе выводятся необходимые условия экстремума для одной негладкой классической задачи вариационого исчисления и негладкой задачи Больца, в которой интегранд представим в виде суммы максимума и минимума конечных семейств непрерывно дифференцируемых функций. На конкретных примерах показывается, что полученные необходимые условия экстремума лучше других существующих необходимых условий экстремума в негладких задачах вариационного исчисления. Также показывается, как теория неоднородных верхних выпуклых аппроксимаций позволяется существенно упростить вывод необходимого условия экстремума в многомерной минимаксной задаче вариационного исчисления.

Пусть функции $f_i\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_i = f_i(x,z,t)$, $i \in \{1,2\}$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x и z на всей своей области определения. Рассмотрим следующую негладкую задачу вариационного исчислени

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b \big(|f_1(x(t), \dot{x}(t), t)| + f_2(x(t), \dot{x}(t), t)\big)\, dt \to \sup, \quad x(a) = x_1, \ x(b) = x_2, \tag{3}$$

где вектор–функция $x = (x_1, \ldots, x_d) \in C^{1,d}[a,b]$ непрерывно дифференцируема и $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ — фиксированные векторы.

Справедливо следующее необходимое условие экстремума в задаче (3).

Предложение 7. *Пусть $x^* \in A$ является точкой локального максимума в задаче (3). Тогда для любого $\lambda \in L_\infty[a,b]$ такого, что $\lambda(t) \in [-1,1]$ и*

$$\lambda(t) f_1(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) = |f_1(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)| \text{ для п.в. } t \in [a,b],$$

существует $c \in \mathbb{R}^d$ такое, что для почти всех $t \in [a,b]$ будет

$$\int_t^b \Big(\lambda(\tau) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau) \Big) \, d\tau + \\ + \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial z}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) = c. \quad (4)$$

Рассмотрим негладкую задачу Больца

$$\mathcal{I}(x) = f_0(x(a), x(b)) + \int_a^b \big(\max_{i \in I} f_i(x(t), \dot{x}(t), t) + \min_{j \in J} g_j(x(t), \dot{x}(t), t) \big) \, dt \to \inf, \quad (5)$$

где функции f_i, $g_j \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_i = f_i(x,z,t)$, $g_j = g_j(x,z,t)$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x и z на всей своей области определения, а $f_0 \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — заданная функция.

Положим

$$f(x,z,t) = \max_{i \in I} f_i(x,z,t), \quad g(x,z,t) = \min_{j \in J} g_j(x,z,t).$$

и введём многозначные отображения

$$\underline{d}_{x,z} f(x,z,t) = \operatorname{co} \left\{ \left(f_i(x,z,t) - f(x,z,t), \frac{\partial f_i}{\partial x}(x,z,t), \frac{\partial f_i}{\partial z}(x,z,t) \right) \;\middle|\; i \in I \right\}$$
$$\overline{d}_{x,z} g(x,z,t) = \operatorname{co} \left\{ \left(g_j(x,z,t) - g(x,z,t), \frac{\partial g_j}{\partial x}(x,z,t), \frac{\partial g_j}{\partial z}(x,z,t) \right) \;\middle|\; j \in J \right\}.$$

Заметим, что множество $\underline{d}_{x,z} f(x,z,t)$ является гиподифференциалом отображения $(x,z) \to f(x,z,t)$ в точке (x,z), а множество $\overline{d}_{x,z} g(x,z,t)$ является гипердифференциалом отображения $(x,z) \to g(x,z,t)$ в точке (x,z).

Справедливо следующее необходимое условие экстремума в задаче (5).

Теорема 9. *Пусть $x^* \in C^{1,d}[a,b]$ является точкой локального минимума в задаче (5), а выпуклая функция $\psi \colon \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ является слабой неодн. в.в.а. функции f_0 в точке $(x^*(a), x^*(b))$, причём $\psi(0,0) = 0$. Тогда для любого измеримого отображения $w \colon [a,b] \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ такого, что $(0, w(t)) \in \overline{d}_{x,z} g(x(t), \dot{x}(t), t)$ для почти всех $t \in [a,b]$ существует абсолютно непрерывная функция $\zeta \colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ такая, что для почти всех $t \in [a,b]$*

$$(0, \dot{\zeta}(t), \zeta(t)) \in \underline{d}_{x,z} f(x(t), \dot{x}(t), t) + \{(0, w(t))\}$$

и выполнено условие трансверсальности $(\zeta(a), -\zeta(b)) \in \underline{\partial} \psi(0,0)$.

В Заключении дается краткий обзор всей работы с перечислением полученных результатов и обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов

1. *Долгополик М.В.* Кодифференциальное исчисление в нормированных пространствах // Проблемы математического анализа. 2011. Вып. 54. С. 3–22.

Переведена:

Dolgopolik M.V. Codifferential calculus in normed spaces // Journal of Mathematica Sciences. 2011. vol. 173, no. 5. pp. 441–462.

2. *Долгополик М.В.* Неоднородные выпуклые аппроксимации негладких функций // Известия вузов. Математика. 2012. № 12. С. 34–50.

Переведена:

Dolgopolik M.V. Inhomogeneous convex approximations of nonsmooth funcitons // Russian Mathematics. 2012. vol. 56, no. 12. pp. 28–42.

3. *Демьянов В.Ф., Долгополик М.В.* Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления // Вестник Санкт–Петербургского университета, серия 10. 2013. Вып. 3. С. 48-67.

Публикации в других изданиях

4. *Долгополик М.В.* Кодифференцируемые функции в нормированных пространствах / Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов; под ред. А.С. Ерёмина, Н.В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.–Петерб. гос. ун–та. 2011. С. 9–14.

5. *Долгополик М.В.* Неоднородные выпуклые аппроксимации негладких функций / Современные проблемы математики: тезисы Международной (43–й Всероссийской) молодёжной школы–конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН. 2012. С. 327–329.

6. *Dolgopolik M.V.* Nonsmooth problems of Calculus of Variations with a codifferentiable integrand / Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы. Тезисы докладов международной конференции. СПб.: Изд–во Санкт–Петербургского университета, 2012. С.46–48.

7. *Dolgopolik M.V.* Nonsmooth Problems of Calculus of Variation via Codifferentiation // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Varations. Submitted for publication.

8. *Dolgopolik M.V.* Abstract Convex Approximations of Nonsmooth Functions // Optimization. In press.