САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Григорьев Михаил Игоревич

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОСТАВНЫХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗЬЕ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор
Малозёмов Василий Николаевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
Даугавет Игорь Карлович,
(Санкт-Петербургский государственный университет)

доктор физико-математических наук, профессор
Певный Александр Борисович
(Сыктывкарский государственный университет)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Академический физико-технологический университет РАН
(Санкт-Петербург)

Защита состоится «18» июня 2009 г. в 13 часов на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 2412.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» ________ 2009 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. *Геометрическое моделирование* (*компьютерная геометрия*, *Computer Aided Geometric Design*, *CAGD*) — относительно молодое направление в прикладной математике, выделившееся в 60-70-х годах прошлого века. Оно объединило некоторые идеи из геометрии и вычислительной математики на базе компьютерных технологий. В геометрическом моделировании изучаются методы построения кривых, поверхностей и тел, а также способы выполнения над ними различных операций.

К настоящему времени опубликовано большое количество работ по геометрическому моделированию. Можно выделить книгу Фарина[1], выдержавшую пять изданий. С 1984 года выходит специализированный журнал «Computer Aided Geometric Design».

Значительный вклад в становление данного направления внесли П. Безье и П. Кастельжо. Они предложили простой и эффективный метод построения кривых и поверхностей. Исходным объектом в их подходе является упорядоченный набор *полюсов* — точек в конечномерном евклидовом пространстве. Построение осуществляется с помощью параметрического варианта метода последовательных линейных интерполяций. Теперь этот метод называется *алгоритмом Кастельжо*, а кривые и поверхности, построенные по алгоритму Кастельжо, — *кривыми и поверхностями Безье*.

Форрест установил связь между кривыми Безье и полиномами в форме Бернштейна. Он показал, что функция, задающая кривую Безье может быть представлена в виде линейной комбинации базисных полиномов Бернштейна. Это позволило исследовать свойства кривых Безье, опираясь на свойства данных полиномов.

Наиболее просто строятся кривые Безье невысоких порядков (2-го, 3-го и 4-го). Но их возможности не позволяют получать кривые сложной формы. Имеются следующие выходы из данной ситуации.

Можно использовать *составные* кривые, сшитые из сегментов, каждый из которых является кривой Безье невысокого порядка. При этом обеспечение гладкости достигается за счёт условий, накладываемых на полюсы сшиваемых кривых. Получающаяся составная кривая является, по сути, параметрическим вариантом полиномиального сплайна.

Кроме того, применяются обобщения кривых Безье, связанные с обобщением понятия полинома Бернштейна.

Активно используются так называемые *проективные* кривые Безье. Каждому полюсу обычной кривой Безье приписывается положительный вес, после чего осуществляется построение кривой Безье в пространстве на единицу большей размерности. Затем, используя центральную проекцию с центром в начале координат, получаем новую кривую в исходном пространстве, которая и называется проективной кривой Безье. Формой такой кривой можно дополнительно управлять, изменяя значения весов при неизменном положении полюсов.

Дальнейшее развитие теории кривых Безье связано с теорией *полярных форм.* Полярные формы являются классическим математическим инструментом при работе с полиномами. Использование полярных форм для полиномов в форме Бернштейна значительно упрощает описание алгоритмов и доказательство различных свойств кривых Безье.

Перейти от кривых к поверхностям Безье можно двумя способами. В первом вводятся так называемые *образующие* кривые Безье, имеющие одинаковую параметризацию. При каждом значении параметра по точкам на этих кривых в свою очередь строится кривая Безье. Перемещаясь по образующим кривым, получаем поверхность, которая называется

[1] Farin G. *Curves and Surfaces for CAGD.* 5th ed. Academic Press, 2002. 520 p.

поверхностью Безье *на четырёхугольнике*. Областью задания параметров такой поверхности является прямоугольник.

Другой подход использует естественное обобщение полиномов Бернштейна на случай двух переменных. Поверхность, которая задается таким полиномом, называется поверхностью Безье *на треугольнике*. Она имеет треугольную область задания параметров. Треугольник является базовым элементом при разбиении двумерных областей, поэтому поверхности Безье на треугольнике нашли широкое применение в численных методах.

Цель работы.

1) *Исследование свойств составных кривых Безье на основе свойств полиномов Бернштейна.*

2) *Поиск возможных обобщений кривых Безье.*

3) *Исследование свойств составных поверхностей Безье на основе свойств полиномов Бернштейна от двух переменных.*

4) *Выяснение предельных возможностей проективных поверхностей Безье второго порядка.*

5) *Построение теории полярных форм полиномов от двух переменных и её использование при построении составных поверхностей Безье.*

6) *Разработка программной системы компьютерного моделирования с использованием составных кривых и поверхностей Безье.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовался аппарат дифференциальной геометрии, вычислительной математики и конструктивной теории функций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) *Разработана схема построения составных кривых Безье заданной гладкости.*

2) *Проведено исследование проективных кривых Безье второго порядка и замкнутых проективных кривых Безье третьего порядка.*

3) *Предложен новый способ обобщения кривых Безье.*

4) *Разработана схема построения составных поверхностей Безье.*

5) *Показано, как построить поверхности тора и сферы при помощи проективных поверхностей Безье второго порядка.*

6) *Предложен способ обобщения поверхностей вращения. Показано, как строить такие поверхности.*

7) *Построена теория полярных форм для полиномов от двух переменных.*

8) *С помощью основной леммы теории полярных форм получены условия гладкости заданного порядка составной поверхности Безье.*

Практическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы при разработке систем автоматического проектирования. В процессе работы над диссертацией была создана программная система моделирования, основным аппаратом в которой являются составные кривые и поверхности Безье.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международная научная конференция «Космос, астрономия и программирование» (Лавровские чтения) (Санкт-Петербург, 20-22 мая 2008 г.);
- семинар кафедры исследования операций математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар кафедры вычислительной математики математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD).

Публикации. По теме диссертации опубликовано шесть работ [1-6], перечисленных в конце автореферата. Статьи [2,3,5] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Работы [3-6] написаны в соавторстве. В статье [3] Малозёмову В. Н. принадлежит вывод и обоснование уравнения в барицентрических координатах для дробно-рациональной кривой Безье второго порядка. Диссертантом осуществлена классификация таких кривых. Сергеев А. Н. внёс уточнение в алгоритм построения окружности при помощи дробно-рациональных кривых Безье. В работе [4] Сергеевым А. Н. был предложен подход к доказательству основной леммы теории полярных форм. Диссертанту принадлежит реализация данного подхода. Малозёмов В. Н. предложил улучшение некоторых доказательств. В статье [5] соавторам принадлежит общая постановка задачи и указание на идею исследования. Детальная реализация идеи осуществлена диссертантом. В работе [6] Сергееву А. Н. принадлежит идея обобщения теории полярных форм на алгебраические полиномы от двух переменных. Реализация этой идеи осуществлена диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 17 параграфов, списка литературы и одного приложения. Объём диссертации — 126 страниц. Список литературы насчитывает 48 наименований. В диссертации имеется 67 рисунков.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена кривым Безье.

В § 1 содержатся вспомогательные сведения о базисных полиномах Бернштейна

$$b_k^n(x) = C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad k \in 0:n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

и полиномах в форме Бернштейна

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k^n(x).$$

Введём треугольный массив $\{a_k^i\}$, $i \in 0:n$, $k \in 0:n-i$, по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} &a_k^i = (1-x)\, a_k^{i-1} + x\, a_{k+1}^{i-1}, \qquad i \in 1:n, \quad k \in 0:n-i; \\ &a_k^0 = a_k, \quad k \in 0:n. \end{aligned} \tag{1}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *При фиксированном x производную ν-го порядка от полинома в форме Бернштейна можно вычислить по формуле*

$$B^{(\nu)}(x) = A_n^\nu \left(\Delta^\nu a^{n-\nu}\right)_0, \qquad \nu \in 0:n,$$

где $(\Delta^\nu a^{n-\nu})_0 = \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\alpha} C_\nu^\alpha a_\alpha^{n-\nu}$ — конечная разность вперёд ν-го порядка и $A_n^\nu = n\,(n-1)\cdots(n-\nu+1)$.

В частности, при $\nu = 0$ имеем $B(x) = a_0^n$. Таким образом, значение полинома Бернштейна можно быстро вычислить с помощью схемы (1).

Рассмотрим полином в форме Бернштейна с векторными коэффициентами

$$\mathbf{B}(u) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k\, b_k^n(u),$$

где $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kt})$. Полином $\mathbf{B}(u)$, $u \in [0,1]$, задаёт кривую в пространстве $\mathbb{R}^t$, которая называется кривой Безье. Векторный вариант быстрого алгоритма (1) соответствует алгоритму Кастельжо построения точки на кривой Безье (см. рис. 1). Этим вопросам посвящён § 2.

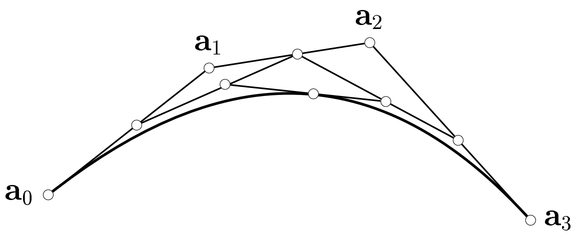

Рис. 1. Алгоритм Кастельжо

В § 3 предлагается схема построения составных кривых Безье. Условия гладкости формулируются в виде соотношений, наложенных на полюсы сшиваемых кривых. Предложен способ увеличения степеней свободы составной кривой Безье за счёт увеличения порядков составляющих её кривых, с сохранением исходной гладкости.

Составим функцию из двух полиномов в форме Бернштейна

$$\mathbf{S}(u) = \begin{cases} \mathbf{Q}(u) \text{ при } u \in [-1,0], \\ \mathbf{B}(u) \text{ при } u \in [0,1], \end{cases}$$

где $\mathbf{Q}(u)$ — полином в форме Бернштейна степени m, ориентированный на отрезок $[-1,0]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Функция $\mathbf{S}(u)$ будет r раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1,1]$ при $r \leqslant \min\{m,n\}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$C_m^i \left(\nabla^i \mathbf{a}\right)_0 = C_n^i \left(\Delta^i \mathbf{a}\right)_0, \qquad i \in 1:r.$$

(Здесь $\left(\nabla^i \mathbf{a}\right)_0$ — конечная разность назад i-го порядка.)

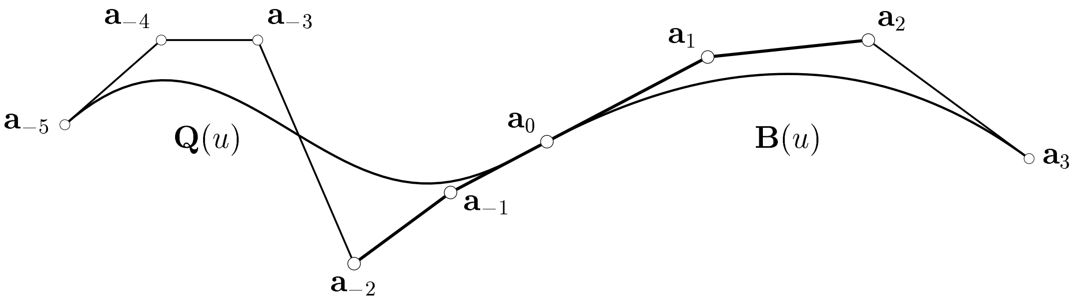

Рис. 2. Составная кривая Безье при $r = 2$

Функция $\mathbf{S}(u)$ задаёт составную кривую, сшитую из двух кривых Безье (рис. 2).

В § 4 изучаются проективные кривые Безье. Зафиксируем полюсы $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^t$ и положительные веса w_k, $k \in 0 : n$. Формула

$$\mathbf{R}(u) = \frac{\sum_{k=0}^{n} w_k\, \mathbf{a}_k\, b_k^n(u)}{\sum_{k=0}^{n} w_k\, b_k^n(u)}\,, \qquad u \in [0, 1],$$

определяет кривую в $\mathbb{R}^t$, которая называется *проективной кривой Безье порядка* n. Её формой при неизменном положении полюсов $\mathbf{a}_k$ можно управлять, варьируя веса w_k.

Интерес представляют проективные кривые Безье небольших порядков. В § 5 рассматриваются проективные кривые Безье второго порядка, которые определяются тремя точками на плоскости $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, и тремя положительными весами w_0, w_1, w_2. Выводится уравнение таких кривых в барицентрических координатах. Оно содержит один независимый параметр $\mu = w_1^2/(w_0\, w_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Проективная кривая Безье второго порядка в барицентрических относительно точек* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *координатах определяется уравнением*

$$4\, \mu\, \lambda_0\, \lambda_2 = \lambda_1^2.$$

Даётся полная классификация проективных кривых Безье второго порядка в зависимости от значений параметра μ.

В § 6 исследуются замкнутые проективные кривые Безье третьего порядка, строящиеся по трём точкам $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, и четырём весам w_0, w_1, w_2, w_3. Выводится уравнение кривой в барицентрических координатах — в данном случае оно содержит два независимых параметра

$$\mu_0 = \frac{w_0\, w_2}{w_1^2} \quad \text{и} \quad \mu_1 = \frac{w_1\, w_3}{w_2^2}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Замкнутая проективная кривая Безье третьего порядка в барицентрических относительно точек* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *координатах определяется неявным уравнением*

$$\mu_0\, \lambda_1^3 + \mu_1\, \lambda_2^3 - 3\, \lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2 = 0.$$

Показано, как строится поле проективных кривых Безье третьего порядка, проходящих через фиксированную точку (рис. 3). Получены условия, при которых через две фиксированные точки можно провести замкнутую проективную кривую (рис. 4).

В § 7 описан способ обобщения кривых Безье, основанный на способе обобщения полиномов Бернштейна, предложенном В. С. Виденским[2]. Базисные полиномы Бернштейна

[2]Виденский В. С. *Линейные положительные операторы конечного ранга.* Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1985. 67 с.

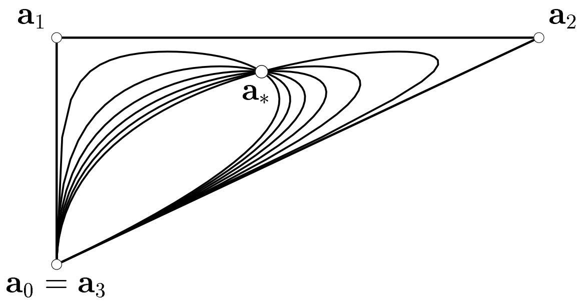

Рис. 3

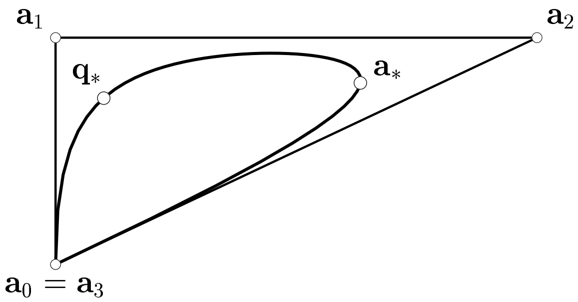

Рис. 4

можно определить с помощью производящей функции $[xy + (1-x)]^n = \sum_{k=0}^n b_k^n(x)\, y^k$. В. С. Виденский рассмотрел более общую производящую функцию и ввёл обобщённые полиномы Бернштейна $p_k^n(x)$:

$$g_n(x,y) := \prod_{i=1}^n \big[h_i(x)\, y + \big(1 - h_i(x)\big)\big] = \sum_{k=0}^n p_k^n(x)\, y^k.$$

Здесь $h_1(x), \ldots, h_n(x) : [0,1] \to [0,1]$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $h_i(0) = 0$, $h_i(1) = 1$ при всех $i \in 1:n$.

Введём обобщённый полином Бернштейна с векторными коэффициентами

$$\mathbf{H}(u) = \sum_{k=0}^n \mathbf{a}_k\, p_k^n(u), \qquad u \in [0,1],$$

где $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ принадлежат $\mathbb{R}^t$. Вектор $\mathbf{H}(u)$ при фиксированном $u \in [0,1]$ является выпуклой комбинацией полюсов $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Когда u изменяется от 0 до 1, вектор $\mathbf{H}(u)$ описывает кривую в пространстве $\mathbb{R}^t$. Назовём её *обобщённой кривой Безье*. Эта кривая соединяет точки $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_n$, не покидая выпуклую оболочку полюсов.

Зафиксируем $u \in (0,1)$. Для вычисления $\mathbf{H}(u)$ построим треугольный массив $\{\mathbf{a}_k^j\}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\mathbf{a}_k^0 = \mathbf{a}_k, \quad k \in 0:n;$$
$$\mathbf{a}_k^j = \big(1 - h_{n-j+1}(u)\big)\, \mathbf{a}_k^{j-1} + h_{n-j+1}(u)\, \mathbf{a}_{k+1}^{j-1}, \qquad k \in 0:n-j, \quad j \in 1:n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Справедливо равенство* $\mathbf{H}(u) = \mathbf{a}_0^n$.

На рис. 5 слева изображена кривая Безье, построенная по полюсам $\mathbf{a}_k = \big(\frac{k}{n}, (-1)^k\big)$, $k \in 0:n$. Справа приведена обобщённая кривая Безье, построенная по тем же полюсам. Использованы дробно-линейные функции

$$h_i(u) = \frac{u\,(1-t_i)}{u - t_i}$$

при специальном выборе узлов $t_i \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $i \in 1:n$.

Вторая глава посвящена поверхностям Безье.

В § 8 и § 10 рассматриваются поверхности Безье на четырёхугольнике и их проективное обобщение. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^t$ заданы полюсы $\mathbf{a}_{ks}$, $k \in 0:m$, $s \in 0:n$. Поверхность Безье порядка $m \times n$ определяется формулой

$$\mathbf{B}(u,v) = \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^n \mathbf{a}_{ks}\, b_k^m(u)\, b_s^n(v), \qquad u, v \in [0,1].$$

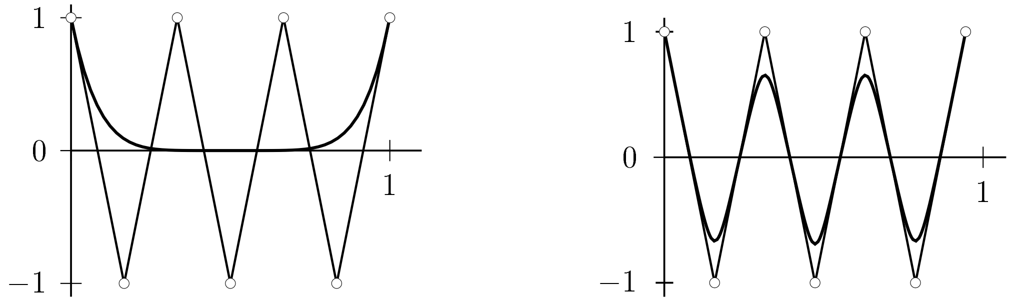

Рис. 5

На основе быстрого алгоритма вычисления значения полинома в форме Бернштейна строится аналог алгоритма Кастельжо для таких поверхностей. Зафиксируем $u, v \in [0,1]$. Введём полюсы

$$\mathbf{a}_{ks}^{ij}(u,v), \quad k \in 0:m-i, \quad i \in 0:m, \quad s \in 0:n-j, \quad j \in 0:n, \tag{2}$$

с помощью рекуррентных соотношений

$$\mathbf{a}_{ks}^{ij} = (1-u)\,\mathbf{a}_{ks}^{i-1,j} + u\,\mathbf{a}_{k+1,s}^{i-1,j}, \qquad k \in 0:m-i, \quad i \in 1:m;$$
$$\mathbf{a}_{ks}^{ij} = (1-v)\,\mathbf{a}_{ks}^{i,j-1} + v\,\mathbf{a}_{k,s+1}^{i,j-1}, \qquad s \in 0:n-j, \quad j \in 1:n;$$
$$\mathbf{a}_{ks}^{00} = \mathbf{a}_{ks}, \qquad k \in 0:m, \quad s \in 0:n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Для полюсов* (2) *справедливо представление*

$$\mathbf{a}_{ks}^{ij}(u,v) = \sum_{\alpha=0}^{i} \sum_{\beta=0}^{j} \mathbf{a}_{k+\alpha,s+\beta}\, b_\alpha^i(u)\, b_\beta^j(v).$$

При $i = m$, $j = n$ имеем $\mathbf{a}_{00}^{mn}(u,v) = \sum_{\alpha=0}^{m} \sum_{\beta=0}^{n} \mathbf{a}_{\alpha\beta}\, b_\alpha^m(u)\, b_\beta^n(v) = \mathbf{B}(u,v)$.

Зафиксируем положительные веса w_{ks}, $k \in 0:m$, $s \in 0:n$. Проективная поверхность Безье порядка $m \times n$ определяется формулой

$$\mathbf{R}(u,v) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} w_{ks}\, \mathbf{a}_{ks}\, b_k^m(u)\, b_s^n(v)}{\sum_{k=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} w_{ks}\, b_k^m(u)\, b_s^n(v)}, \qquad u, v \in [0,1].$$

Её формой при неизменном положении полюсов $\mathbf{a}_{ks}$ можно дополнительно управлять, варьируя веса w_{ks}.

В § 9 предлагается схема построения составных поверхностей Безье. Рассмотрим составную поверхность Безье

$$\mathbf{S}(u,v) = \begin{cases} \mathbf{Q}(u,v), & u \in [-1,0], \quad v \in [0,1]; \\ \mathbf{B}(u,v), & u \in [0,1], \quad v \in [0,1], \end{cases}$$

где поверхность $\mathbf{Q}(u,v)$ задана на квадрате $[-1,0] \times [0,1]$ и строится по полюсам $\mathbf{a}_{-k,s}$, $k \in 0:p$, $s \in 0:n$. Поверхности $\mathbf{Q}(u,v)$ и $\mathbf{B}(u,v)$ имеют общее ребро $\mathbf{Q}(0,v) = \mathbf{B}(0,v)$, $v \in [0,1]$. Введём оператор взятия конечной разности на двухиндексном множестве элементов $\left(\Delta^\alpha\, \mathbf{a}_{*,s}\right)_k = \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-i}\, C_\alpha^k\, \mathbf{a}_{k+i,s}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Для того, чтобы поверхность* $\mathbf{S}(u,v)$ *обладала гладкостью* r*-го порядка* ($r \le \min\{m,p\}$) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$A_p^{\alpha}\left(\Delta^{\alpha}\,\mathbf{a}_{*,s}\right)_{-\alpha} = A_m^{\alpha}\left(\Delta^{\alpha}\,\mathbf{a}_{*,s}\right)_0, \qquad s \in 0:n, \quad \alpha \in 1:r. \tag{3}$$

На рис. 6 слева изображены две поверхности Безье, сшитые с сохранением гладкости 1-го порядка. Полюсы, отмеченные на рисунке, связаны условиями (3).

Также в § 9 рассмотрен случай состыковки четырёх поверхностей, имеющих общие рёбра и один общий узел. Пример такой составной поверхности, сшитой из четырёх поверхностей Безье при $m = n = 3$, $r = 2$, приведён на рис. 6 справа.

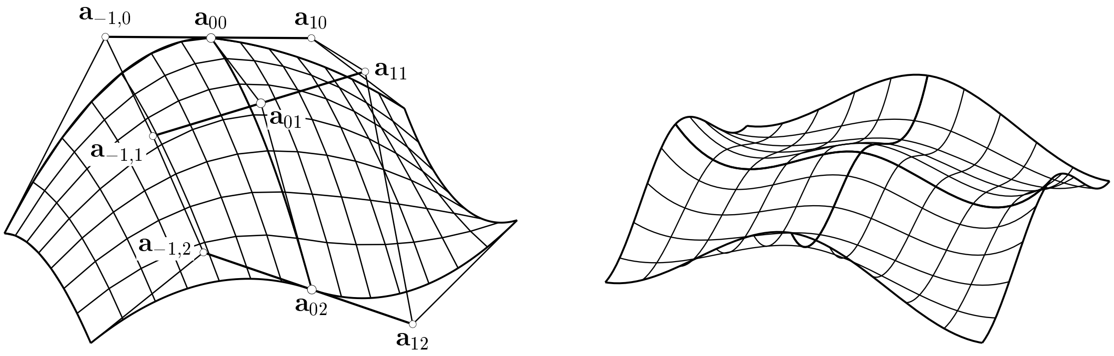

Рис. 6

В § 11 исследуются предельные возможности проективных поверхностей Безье второго порядка. Показывается, как построить поверхности сферы и тора с помощью проективных поверхностей Безье (см. рис. 7). Используются девять полюсов и специальный набор весов.

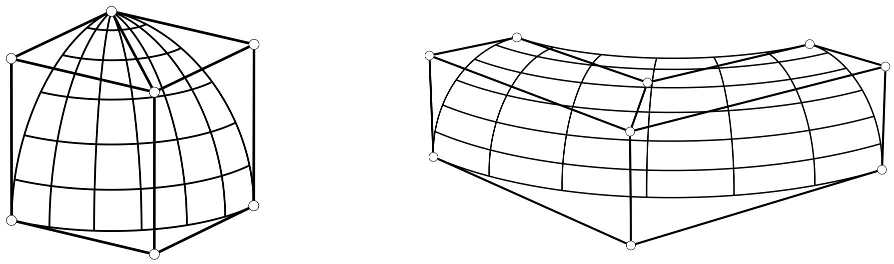

Рис. 7

В § 12 предлагается способ обобщения классических поверхностей вращения. Первое обобщение связано с заменой прямолинейной оси вращения на некоторую пространственную кривую — так называемую кривую *центров*. Также обобщается само понятие вращения так, что сечением такой поверхности становится не окружность, а эллипс с двумя независимыми полуосями.

Обобщённая поверхность вращения строится как полигональная поверхность, при этом используются проективные кривые Безье второго порядка.

На рис. 8 приведён пример обобщённой поверхности вращения. Исходные кривая радиусов $\mathbf{F}$ и кривая центров $\mathbf{C}$ представлены на рис. 9.

В § 13 рассматриваются полиномы Бернштейна от двух переменных. Обозначим базисные полиномы Бернштейна от двух переменных

$$b_{ks}^{n}(x,y) = C_n^{k,s}\,x^k\,y^s\,(1-x-y)^{n-k-s}, \qquad k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k,$$

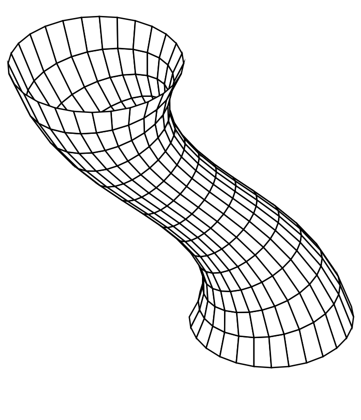

Рис. 8

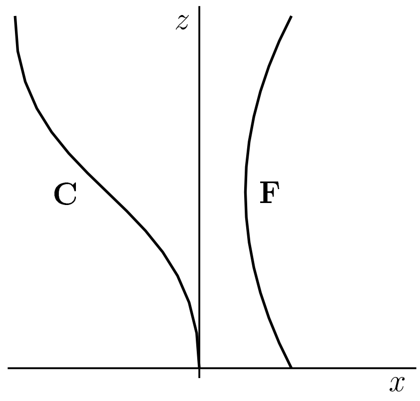

Рис. 9

где $C_n^{k,s} = \frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}$. Полином вида

$$\mathcal{B}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, b_{ks}^{n}(x,y)$$

называется полиномом в форме Бернштейна от двух переменных степени n.

Зафиксируем произвольные вещественные x, y. Для вычисления значения $\mathcal{B}(x,y)$ введём $n+1$ треугольных массивов $\{a_{ks}^{i}\}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} &a_{ks}^{0} = a_{ks}, \qquad k \in 0:n, \quad s \in 0:n-k;\\ &a_{ks}^{i} = (1-x-y)\, a_{ks}^{i-1} + x\, a_{k+1,s}^{i-1} + y\, a_{k,s+1}^{i-1},\\ &k \in 0:n-i, \quad s \in 0:n-i-k, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.2. *Справедливо равенство* $\mathcal{B}(x,y) = a_{00}^{n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.3. *При фиксированных* x, y *частные производные от полинома в форме Бернштейна можно вычислить по формуле*

$$\frac{\partial^{\nu}\mathcal{B}(x,y)}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} = A_n^{\nu}\left(\Delta^{\alpha,\beta}\, a^{n-\nu}\right)_{00}, \qquad \alpha+\beta=\nu, \qquad \nu \in 1:n.$$

(*Здесь* $\left(\Delta^{\alpha,\beta}\, a^{n-\nu}\right)_{00}$ — *конечная разность на треугольном массиве коэффициентов.*)

В § 14 строится теория полярных форм полиномов от двух переменных. Точки из $\mathbb{R}^2$ будем обозначать $\xi = (x,y)$, $\xi_i = (x_i, y_i)$. Введём основные симметрические полиномы над переменными из $\mathbb{R}^2$:

$$\sigma_{00}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \equiv 1,$$

$$\sigma_{ks}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{I_k \subset N} \sum_{J_s \subset N \setminus I_k} \prod_{i \in I_k} x_i \prod_{j \in J_s} y_j, \tag{5}$$

$$k, s \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k+s \leqslant n.$$

Суммирование в правой части (5) ведётся по всем подмножествам I_k множества $N = \{1,\ldots,n\}$, содержащим ровно k элементов, и по всем подмножествам J_s множества $N \setminus I_k$, содержащим ровно s элементов. *Полярной формой* полинома степени n от двух переменных вида

$$P(\xi) = P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} C_n^{k,s}\, d_{ks}\, x^k\, y^s \tag{6}$$

называется выражение

$$p(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} d_{ks}\, \sigma_{ks}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Полярная форма является симметричной функцией своих аргументов. С порождающим полиномом её связывает соотношение $p(\xi, \dots, \xi) = P(\xi)$. Значение $p(\xi_1, \dots, \xi_n)$ при конкретных значениях аргументов $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется *полюсом* полинома $P(\xi)$ вида (6).

Важным свойством полярной формы является мультиаффинность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.1. *При любом $r \in 1 : n$ справедливо равенство*

$$p(\xi_1, \dots, u\,\xi_r' + v\,\xi_r'', \dots, \xi_n) = u\, p(\xi_1, \dots, \xi_r', \dots, \xi_n) + \\ + v\, p(\xi_1, \dots, \xi_r'', \dots, \xi_n),$$

если $u + v = 1$.

Полюсы полярной формы можно вычислять эффективно. Зафиксируем $\xi_1, \dots, \xi_n$ и построим $n + 1$ треугольных массивов $\{d_{ks}^i\}$ по правилу

$$d_{ks}^0 = d_{ks}, \qquad k \in 0 : n, \quad s \in 0 : n - k;$$

$$d_{ks}^i = d_{ks}^{i-1} + x_{n-i+1}\, d_{k+1,s}^{i-1} + y_{n-i+1}\, d_{k,s+1}^{i-1}\,,$$

$$k \in 0 : n - i, \quad s \in 0 : n - i - k, \quad i = 1, \dots, n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.2. *Справедливо равенство $p(\xi_1, \dots, \xi_n) = d_{00}^n$.*

Пусть на плоскости выбраны три точки ξ_0, ξ_1, ξ_2, не лежащие на одной прямой. Зафиксируем числа a_{ks}, $k \in 0 : n$, $s \in 0 : n - k$, и рассмотрим задачу *интерполяции по полюсам*: найти полином $P(\xi)$ вида (6), такой, что

$$p(\xi_0^{n-k-s}, \xi_1^k, \xi_2^s) = a_{ks}, \qquad k \in 0 : n, \quad s \in 0 : n - k. \tag{7}$$

(Здесь степень у аргумента означает количество его повторений.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.3. *Единственным решением интерполяционной задачи* (7) *является полином Бернштейна*

$$\mathcal{B}(\xi) := \mathcal{B}(u, v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, b_n^{ks}(u, v), \tag{8}$$

где $\xi = (1 - u - v)\,\xi_0 + u\,\xi_1 + v\,\xi_2$.

В § 15 в терминах полярных форм получены условия совпадения в точке двух полиномов от двух переменных вместе со всеми их частными производными до требуемого порядка (*основная лемма теории полярных форм*).

Рассмотрим два полинома $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ степени n с соответствующими полярными формами $p^1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $p^2(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

ЛЕММА 15.3 (Основная). *Для того чтобы в некоторой точке $\eta \in \mathbb{R}^2$ полиномы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ совпадали вместе со всеми своими частными производными до q-го порядка включительно, необходимо и достаточно, чтобы при любых $\eta_1, \ldots, \eta_q$ из $\mathbb{R}^2$ выполнялось равенство*

$$p^1(\eta^{n-q}, \eta_1, \ldots, \eta_q) = p^2(\eta^{n-q}, \eta_1, \ldots, \eta_q).$$

В § 16 исследуются поверхности Безье на треугольнике. Введём полином степени n от двух переменнных в форме Бернштейна с векторными коэффициентами, ориентированный на треугольник с вершинами ξ_0, ξ_1, ξ_2 :

$$\mathfrak{B}(\xi) = \mathfrak{B}(u, v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} \mathbf{a}_{ks}\, b_{ks}^n(u, v), \tag{9}$$

где $\xi = (1 - u - v)\,\xi_0 + u\,\xi_1 + v\,\xi_2$. Полином (9) определяет поверхность в $\mathbb{R}^t$, которая называется *поверхностью Безье на треугольнике*. Векторный вариант быстрого алгоритма (4) вычисления значения полинома Бернштейна соответствует алгоритму Кастельжо построения точки на поверхности Безье (см. рис. 10). Основной процедурой в данном алгоритме является двумерная линейная интерполяция.

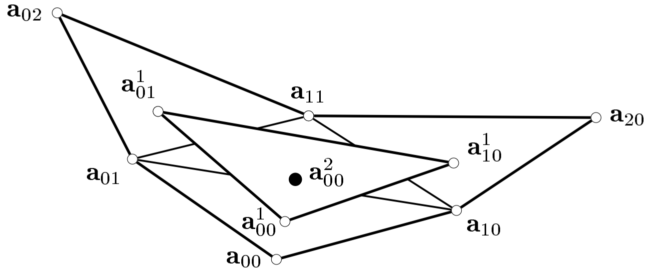

Рис. 10

Теорию полярных форм полиномов от двух переменных можно обобщить на случай полиномов с векторными коэффициентами. Обозначим $\mathbf{b}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ полярную форму полинома $\mathfrak{B}(\xi)$. Значения этой полярной формы вида

$$\mathbf{b}(\xi_0^{n-k-s}, \xi_1^k, \xi_2^s), \qquad k \in 0 : n, \quad s \in 0 : n - k, \tag{10}$$

известны, они совпадают с полюсами $\mathbf{a}_{ks}$ поверхности Безье $\mathfrak{B}(\xi)$ (Предложение 14.3).

Поверхность $\mathfrak{B}(\xi)$ задана на треугольнике $\xi_0\,\xi_1\,\xi_2$. Очевидно, можно расширить область определения поверхности на всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем три точки η_0, η_1, η_2 на плоскости, не лежащие на одной прямой. По полюсам (10) найдём все полюсы вида

$$\mathbf{b}(\eta_0^{n-k-s}, \eta_1^k, \eta_2^s), \qquad k \in 0 : n, \quad s \in 0 : n - k,$$

которые определяют порцию поверхности $\mathfrak{B}(\xi)$ над треугольником $\eta_0\,\eta_1\,\eta_2$.

На рис. 11 приведен пример использования данного алгоритма. Слева показано, как расположены точки η_0, η_1, η_2 и ξ_0, ξ_1, ξ_2 . Справа изображены соответствующие порции поверхности $\mathfrak{B}(\xi)$.

Аналогичным способом можно находить полюсы для кривых Безье на поверхности $\mathfrak{B}(\xi)$, соответствующих прямолинейным отрезкам в области параметров (рис. 12).

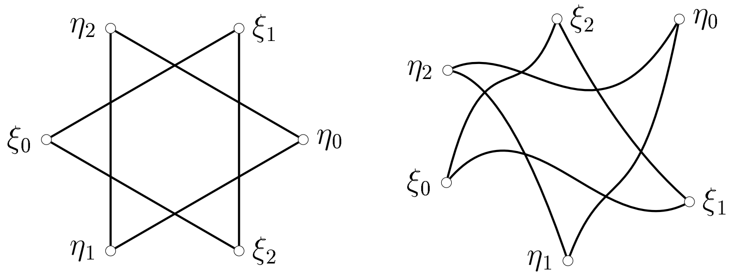

Рис. 11

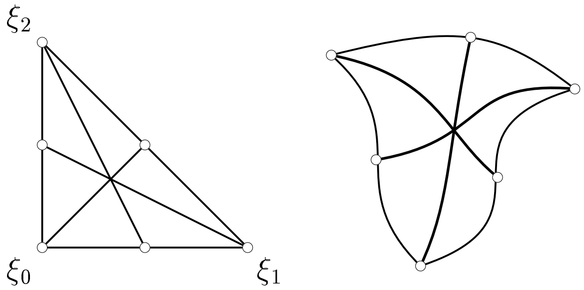

Рис. 12

В § 17 рассматривается сшивка поверхностей Безье на треугольнике. Зафиксируем в плоскости параметров точку ξ_3 так, чтобы треугольники $\xi_0\,\xi_1\,\xi_2$ и $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ не пересекались. Пусть на $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ задана поверхность Безье $\mathfrak{Q}(\xi)$ порядка n. Обозначим её полярную форму $\mathbf{q}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. С помощью основной леммы теории полярных форм можно получить условия гладкой сшивки до r-го порядка ($r \in 1:n$) поверхностей $\mathfrak{B}(\xi)$ и $\mathfrak{Q}(\xi)$ на общем ребре $\xi_1\,\xi_2$:

$$\begin{gathered}\mathbf{q}(\xi_1^{n-k-s},\xi_2^s,\xi_3^k)=\mathbf{b}(\xi_1^{n-k-s},\xi_2^s,\xi_3^k),\\ k\in 0:r,\quad s\in 0:n-k,\end{gathered}\tag{11}$$

или

$$\begin{gathered}\mathbf{q}(\xi_1^{n-k-s},\xi_2^s,\xi_3^k)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\mathbf{b}(\xi_0^{k-i-j},\xi_1^{n-k-s+i},\xi_2^{s+j})\,b_{ij}^k(u_*,v_*),\\ k\in 0:r,\quad s\in 0:n-k,\end{gathered}\tag{12}$$

где $\xi_3=(1-u_*-v_*)\,\xi_0+u_*\,\xi_1+v_*\,\xi_2$. Полюсы поверхности $\mathfrak{Q}(\xi)$, на которые наложены условия, являются *связанными*. Остальные полюсы поверхности $\mathfrak{Q}(\xi)$ можно выбирать произвольно.

На рис. 13 изображены полюсы двух поверхностей Безье 3-го порядка, сшитых с сохранением гладкости 1-го порядка. Точками выделены полюсы, на которые наложены условия гладкости. Сшитая из этих поверхностей C^1-гладкая поверхность приведена на рис. 14.

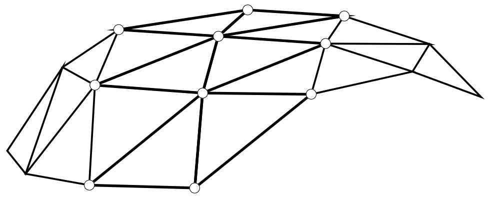

Рис. 13

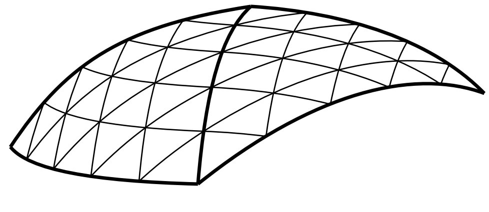

Рис. 14

Также в §17 рассмотрен случай, когда стыкуются три поверхности Безье, попарно имеющие общие рёбра и один общий узел (рис. 15). Для данной конфигурации возникает неоднозначность при определении положения связанных полюсов. Получены достаточные условия, которые данную неоднозначность разрешают. Пример такой составной поверхности для $n = 3$, $r = 2$ приведён на рис. 16.

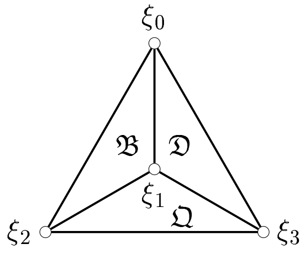

Рис. 15

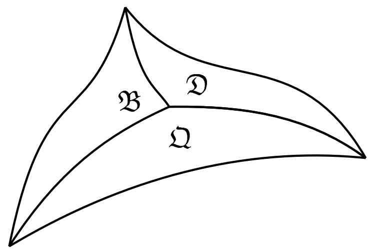

Рис. 16

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Григорьев М. И. *Полиномы Бернштейна от двух переменных* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2008-05. (http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2008/index.html#05).

2. Григорьев М. И. *Построение сферы с помощью проективных поверхностей Безье* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 127–131.

3. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *О классификации дробно-рациональных кривых Безье второго порядка* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 2. С. 103–108.

4. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Основная лемма теории полярных форм полиномов от двух переменных* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2008-07. (http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2008/index.html#07).

5. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н. *Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 1962–1971.

6. Григорьев М. И., Сергеев А. Н. *Полярная форма полиномов от двух переменных* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2008-06. (http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2008/index.html#06).