САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Соловьева Наталья Анатольевна

ВЕЙВЛЕТЫ И ФРЕЙМЫ В ДИСКРЕТНОМ АНАЛИЗЕ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010 г.

Работа выполнена на кафедре исследования операций
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор
Малозёмов Василий Николаевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
Демьянович Юрий Казимирович,
(Санкт-Петербургский государственный университет)

кандидат физико-математических наук, доцент
Беспалов Михаил Сергеевич
(Владимирский государственный университет)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Академический университет РАН
(Санкт-Петербург)

Защита состоится 23 сентября 2010 г. в «___» часов на заседании совета Д 212.232.49 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» ________ 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,

доктор физико-математических наук, профессор А. А. Архипова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Во многих направлениях вычислительной математики актуальны задачи поиска базисов, разложения по которым наилучшим в некотором смысле образом описывают элементы пространства. Широкое применение нашли вейвлетные базисы.

Общепринятый базис Фурье хорошо выделяет частоты, но не даёт информации о резких и коротких всплесках и вообще о локальном поведении функции. Желательно, чтобы элементы базиса были лучше локализованы по времени. Вейвлетные базисы удовлетворяют такому требованию. Часто накладываются и дополнительные условия, например, ортогональность базиса, компактность носителей вейвлетов и т. д.

Теория вейвлетов начала активно развиваться в 80–90-е годы двадцатого века. К настоящему времени опубликовано несколько монографий по теории вейвлетов (И. Добеши, М. Фрейзер, К. Чуи). Классиками теории вейвлетов являются И. Мейер и И. Добеши.

Одним из способов построения вейвлетных базисов является лифтинговая схема, предложенная В. Свелденсом. *Лифтинг* означает изменение, «приподнимание» низкочастотной составляющей, несущей основную информацию об исходных данных. Величина изменения зависит от вейвлетной составляющей и управляющей функции. Отметим преимущества лифтинговой схемы. Во-первых, за счёт наличия управляющей функции можно влиять на свойства получаемых вейвлетов. Во-вторых, в алгоритме, реализующем лифтинговую схему разложения функции по вейвлетному базису, все вычисления проводятся «на месте», в одном массиве. В-третьих, лифтинговая схема допускает обращение. Примером применения лифтинговой схемы может служить построение интерполяционных вейвлетов, введённых Донохо.

Лифтинговая схема была предложена также в случае дискретных периодических сигналов[1] и стала одним из инструментов дискретного гармонического анализа.

Дискретный гармонический анализ обязан своим становлением открытию в 1965 году быстрого преобразования Фурье (БПФ). К середине 1990-х годов было осознано, что вычислительная схема БПФ связана с построением в пространстве сигналов рекуррентной последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. Это позволило, в частности, сформировать систему вейвлетных базисов (вейвлет-пакет), коэффициенты разложений по которым определяются в процессе вычисления дискретного преобразования Фурье. Разработан также параметрический вариант БПФ.

Важную роль в дискретном гармоническом анализе играют дискретные периодические сплайны. Сплайн-интерполяция используется при описании лифтинговой схемы.

Особенность лифтинговой схемы для дискретных периодических сигналов состоит в том, что все вычисления ведутся в частотной области с использованием дискретного преобразования Фурье.

Вейвлеты активно используются во многих областях вычислительной математики, в том числе в цифровой обработке сигналов.

Кроме разложений элементов пространства по базисам, в дискретном анализе изучаются разложения по фреймам. Фреймы были введены в 1952 году Даффином и Шеффером, однако активное развитие теории фреймов началось лишь после выхода в 1986 году статьи Добеши, Гроссмана и Мейера. К настоящему времени на эту тему опубликованы несколько монографий (О. Кристенсен, Д. Хан и Д. Ларсон) и обзорных статей (П. Казацца, Е. Ковачевич, А. Чебира).

[1] Желудев В. А., Певный А. Б. *Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 537–548.

Обратимся к фреймам в конечномерных пространствах. Конечномерный фрейм — избыточная система векторов, порождающая всё пространство. Именно свойство избыточности позволяет восстановить исходный сигнал, если при передаче по сети некоторые из коэффициентов его разложения по фрейму были потеряны.

Понятие фрейма очень широко — фреймом является любая система векторов, содержащая базис. Основной интерес представляют фреймы, близкие в некотором смысле к ортогональным базисам. Такие фреймы называются жёсткими. Именно жёсткие фреймы оказываются наиболее удобными во многих прикладных задачах.

Среди жёстких фреймов выделяют отдельные классы, важные с точки зрения приложений: гармонические и обобщённые гармонические фреймы, равноугольные жёсткие фреймы, жёсткие фреймы, обладающие групповой структурой. Способы построения и свойства некоторых из этих классов изучаются, например, в работе П. Казацца и Е. Ковачевич[2].

Также представляет интерес построение фреймов с конкретными свойствами: например, с заданными нормами элементов и заданной матрицей фрейма.

Задача восстановления исходного вектора по его фреймовым коэффициентам потребовала введения понятия двойственных фреймов, среди которых на основе экстремального свойства выделяется канонический двойственный фрейм.

Фреймы являются одним из важных инструментов цифровой обработки сигналов.

Цель работы.

1) *Детальное изучение лифтинговых преобразований дискретных периодических сигналов с точки зрения дискретного гармонического анализа.*

2) *Выяснение, как влияют управляющие функции на формирование лифтинговых базисов с определёнными свойствами.*

3) *Исследование конечномерных фреймов специального вида, в которых каждый следующий элемент получается умножением предыдущего на унитарную матрицу.*

4) *Получение быстрых алгоритмов вейвлетных разложений.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовались методы дискретного гармонического анализа, вычислительной математики, линейной алгебры.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) *Детально разработана теория лифтинговых преобразований в пространстве дискретных периодических сигналов.*

2) *Изучено влияние управляющих функций на свойства лифтинговых базисов. Найден способ выражения всех элементов лифтингового базиса через базисные функции первого уровня.*

3) *Исследованы системы векторов специального вида, в которых каждый следующий вектор получается умножением предыдущего на унитарную матрицу. Установлен критерий, когда такая система является жёстким фреймом. Указан способ преобразования системы специального вида в обобщённый гармонический фрейм.*

---

[2] Casazza P. G., Kovačević J. *Uniform tight frames with erasures* // Adv. Comput. Math. 2003. V. 18. No. 2–4. P. 387–430.

4) *Выяснены условия, при которых система векторов специального вида является циклическим фреймом. Установлено циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве.*

5) *Разработан алгоритм построения фрейма по заданной матрице фрейма и заданным нормам его элементов.*

6) *Дан детальный анализ методов факторизации полифазных матриц.*

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в цифровой обработке сигналов.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международная научная конференция «Вейвлеты и приложения» (Санкт-Петербург, 14-20 июня 2009 г.);
- семинар кафедры вычислительной математики математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар кафедры исследования операций математико-механического факультета СПбГУ;
- семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD).

Публикации. По теме диссертации опубликовано пять работ [1–5], перечисленных в конце автореферата. Статьи [1,2] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Работы [1,3–5] написаны в соавторстве. В статье [1] В. Н. Малозёмову принадлежит анализ случая ортогональности лифтинговых базисов некоторого уровня. Кроме того, В. Н. Малозёмов предложил некоторые идеи относительно свойств лифтинговых базисов. Реализация идей принадлежит диссертанту. В статье [3] В. Н. Малозёмову принадлежит описание множества управляющих функций, А. Б. Певный внёс некоторые предложения относительно свойств базисов лифтинговых разложений. Детальная реализация идей осуществлена диссертантом. В статье [4] В. Н. Малозёмов предложил упрощение доказательств. Диссертанту принадлежит вывод рекуррентного соотношения для унитарной матрицы и вычисление спектра этой матрицы. В работе [5] В. Н. Малозёмову принадлежит общая постановка задачи и описание матрицы вращений в алгоритме построения фрейма с заданной матрицей фрейма и заданными нормами векторов. Обоснования осуществлены диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 16 параграфов, списка литературы и одного приложения. Объём диссертации — 133 страницы. Список литературы насчитывает 51 наименование. В диссертации имеется 8 рисунков.

Основные обозначения

$\mathbb{C}_N$ — пространство сигналов (комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента, $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$);

$\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень степени N из единицы;

$\mathcal{F}_N$ — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) порядка N, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с отсчётами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \omega_N^{-kj}, \qquad k \in \mathbb{Z};$$

$\mathcal{F}_N^{-1}$ — обратное ДПФ, действующее по формуле

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X(k)\, \omega_N^{kj}, \qquad j \in \mathbb{Z};$$

I_n — единичная матрица порядка n.

Содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор и сформулированы основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена вейвлетам в дискретном гармоническом анализе.

В § 1 содержатся вспомогательные сведения об интерполяции дискретными периодическими сплайнами. Расматриваются два частных случая: когда предсказываются нечётные отсчёты сигнала с помощью интерполяции по чётным, и наоборот. Во втором случае используется сплайн со сдвигом аргумента на единицу.

В § 2 вводится лифтинговое преобразование сигнала в спектральной форме. Пусть m, r — натуральные числа. Пусть сигнал z принадлежит пространству $\mathbb{C}_N$ при $N = 2m$. Имея в виду дальнейшее развитие событий, введём обозначения

$$N_0 = N, \quad N_1 = m, \quad e_0 = z.$$

Лифтинговое преобразование сигнала z осуществляется в три этапа.

I (*Split*). Расщепим сигнал e_0 на два сигнала

$$\widetilde{e}_1(l) = e_0(2l), \quad \widetilde{d}_1(l) = e_0(2l+1), \quad l \in 0 : N_1 - 1.$$

Обозначим $\widetilde{E}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{e}_1)$, $\widetilde{D}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\widetilde{d}_1)$.

II (*Predict*). Вычислим приближённые значения $\widetilde{d}_1(l)$ с помощью дискретного периодического сплайна S порядка r, определяемого интерполяционными условиями

$$S(2l) = \widetilde{e}_1(l), \qquad l \in 0 : N_1 - 1.$$

Положим $\sigma_0(l) = S(2l+1)$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Разность

$$d_1(l) = \widetilde{d}_1(l) - \sigma_0(l), \qquad l \in 0 : N_1 - 1,$$

вообще говоря, мала. Для спектра этой разности справедлива формула

$$D_1(k) = \widetilde{D}_1(k) - \omega_{N_0}^k U_1(k)\, \widetilde{E}_1(k), \qquad k \in 0 : N_1 - 1.$$

Здесь

$$U_1(k) = \frac{\left(\cos\frac{\pi k}{N}\right)^{2r} - \left(\sin\frac{\pi k}{N}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{N}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{N}\right)^{2r}}, \qquad k \in 0 : N_0 - 1.$$

III (*Lifting*). Обновим сигнал $\widetilde{e}_1$. Для этого введём сигнал e_1, спектр которого $E_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$ определим так:

$$E_1(k) = \widetilde{E}_1(k) + \beta_1(k)\,\omega_{N_0}^{-k}\,D_1(k), \qquad k \in 0 : N_1 - 1. \tag{1}$$

Здесь $\beta_1(k)$ — произвольный N_0-периодический сигнал (управляющая функция), удовлетворяющий условию

$$\beta_1(k + N_1) = -\beta_1(k), \qquad k \in 0 : N_1 - 1.$$

Ясно, что правая часть (1) является N_1-периодическим сигналом.

Пара (E_1, D_1) называется *лифтинговым преобразованием сигнала z в спектральной форме*. Спектр E_1 содержит основную информацию о спектре $E_0 = \mathcal{F}_{N_0}(e_0)$ сигнала z, а спектр D_1 — детали.

В § 3 вводится многоуровневое лифтинговое преобразование сигнала. Будем считать, что $N = 2^s$. Обозначим $N_\nu = N/2^\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Это обозначение согласовано с обозначениями N_0, N_1, введёнными выше. Отметим также, что $N_s = 1$.

Ранее было описано лифтинговое преобразование $E_0 \to (E_1, D_1)$. Это преобразование можно продолжить:

$$E_1 \to (E_2, D_2), \quad E_2 \to (E_3, D_3), \quad \ldots, \quad E_{s-1} \to (E_s, D_s).$$

Укажем соответствующие формулы. Положим при $k \in 0 : N_{\nu-1} - 1$

$$U_\nu(k) = \frac{\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r} - \left(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{\pi k}{N_{\nu-1}}\right)^{2r}},$$

$$\widetilde{g}_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{k}\big(1 - U_\nu(k)\big), \quad \widetilde{h}_\nu(k) = 1 + \beta_\nu(k)(1 - U_\nu(k)).$$

Здесь $\beta_\nu(k)$ — произвольная $N_{\nu-1}$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k), \qquad k \in 0 : N_\nu - 1.$$

В § 3 доказывается следующее утверждение: *при $k \in 0 : N_\nu - 1$ справедливы равенства*

$$E_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\,[\widetilde{h}_\nu(k)\,E_{\nu-1}(k) + \widetilde{h}_\nu(k + N_\nu)\,E_{\nu-1}(k + N_\nu)],$$
$$D_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\,[\widetilde{g}_\nu(k)\,E_{\nu-1}(k) + \widetilde{g}_\nu(k + N_\nu)\,E_{\nu-1}(k + N_\nu)].$$

Набор спектров $(E_s, D_s, D_{s-1}, \ldots, D_1)$ называется *полным лифтинговым преобразованием* сигнала z. Отметим, что E_s и D_s — это числа.

По полному лифтинговому преобразованию $(E_s, D_s, D_{s-1}, \ldots, D_1)$ легко восстановить спектр E_0 исходного сигнала z. Для этого введём два вспомогательных сигнала

$$h_\nu(k) = 1 + U_\nu(k), \quad g_\nu(k) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-k}\big(1 - \beta_\nu(k)\,h_\nu(k)\big), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1.$$

Имеем

$$E_{\nu-1}(k) = h_\nu(k)\,E_\nu(k) + g_\nu(k)\,D_\nu(k),$$
$$E_{\nu-1}(k + N_\nu) = h_\nu(k + N_\nu)\,E_\nu(k) + g_\nu(k + N_\nu)\,D_\nu(k),$$
$$k \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

При $\nu = 1$ получим $E_0 = \mathcal{F}_N(z)$.

Формула обращения для лифтингового преобразования приводит к лифтинговому разложению сигнала по вейвлетному базису. Этому вопросу посвящён § 4. Введём обозначения $H_\nu = h_1 h_2 \cdots h_\nu$, $G_\nu = h_1 h_2 \cdots h_{\nu-1}\, g_\nu$,

$$\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu), \qquad \psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть $N = 2^s$ и $t \in 1 : s$. Для любого сигнала $z \in \mathbb{C}_N$ справедливо разложение*

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N_t-1} e_t(k)\, \varphi_t(j - 2^t k) + \sum_{\nu=1}^{t} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k), \quad j \in \mathbb{Z}\,, \tag{2}$$

где $e_t = \mathcal{F}_{N_t}^{-1}(E_t)$, $d_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(D_\nu)$.

Формула (2) называется *лифтинговым разложением* сигнала z.

При каждом $t \in 1 : s$ система сигналов

$$\Big\{ \big\{\varphi_t(j - 2^t k)\big\}_{k=0}^{N_t-1}; \;\; \big\{\psi_\nu(j - 2^\nu k)\big\}_{k=0}^{N_\nu-1},\ \nu = 1, \ldots, t \Big\}$$

является базисом в $\mathbb{C}_N$.

При $t = s$ формула (2) называется *полным лифтинговым разложением* сигнала z. Первая сумма в правой части такого разложения вырождается до одного слагаемого $e_s(0)\varphi_s(j)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Имеет место тождество $\varphi_s(j) \equiv 1$.*

На основании предложений 4.2 и 4.3 заключаем, что полное лифтинговое разложение сигнала $z \in \mathbb{C}_N$ имеет вид

$$z(j) = e_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{k=0}^{N_\nu-1} d_\nu(k)\, \psi_\nu(j - 2^\nu k), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Сигналы $\varphi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(H_\nu)$, $\nu \in 1 : s$, вещественны и чётны, поскольку вещественными и чётными являются их дискретные преобразования Фурье H_ν. Разберёмся с сигналом $\psi_\nu = \mathcal{F}_N^{-1}(G_\nu)$, зависящим от управляющей $N_{\nu-1}$-периодической функции β_ν. Пока что на β_ν наложено одно условие

$$\beta_\nu(k + N_\nu) = -\beta_\nu(k), \qquad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1. \tag{4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Допустим, что наряду с (4) функция β_ν обладает следующими свойствами:*

β_ν *вещественна и чётна,*

$\beta_\nu(0) = \frac{1}{2}$.

Тогда сдвинутый сигнал $x_\nu(j) = \psi_\nu(j + \Delta_\nu)$, где $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$, будет вещественным и чётным. При этом

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_\nu(j) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Если исходный сигнал $z(j)$ — вещественный и выполнены условия предложения* 4.4, *то все коэффициенты полного лифтингового разложения* (3) *вещественны.*

В § 5 и § 6 вводится двойственное лифтинговое преобразование и соответствующее двойственное лифтинговое разложение сигнала. В двойственном лифтинговом преобразовании используется сплайн-интерполяция по нечётным отсчётам.

В § 7 устанавливается биортогональность базисов прямого и двойственного лифтинговых разложений.

Параграф 8 посвящён описанию множества управляющих функций $\beta_1, \ldots, \beta_s$, удовлетворяющих условиям предложения 4.4. Напомним, что основным периодом $\beta_\nu(k)$ является множество $0 : N_{\nu-1} - 1$.

Функции β_s и β_{s-1} определяются однозначно: $\beta_s(0) = \frac{1}{2}$, $\beta_s(1) = -\frac{1}{2}$;

$$\beta_{s-1}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{при } k = 2, \\ 0 & \text{при } k = 1, 3. \end{cases}$$

Отметим, что $\beta_{s-1}(2k) = \beta_s(k)$ при $k = 0 : 1$. Потребуем, чтобы и в общем случае при $\nu = s-2, s-3, \ldots, 1$ выполнялось соотношение

$$\beta_\nu(2k) = \beta_{\nu+1}(k), \qquad k \in 0 : N_\nu - 1. \tag{5}$$

Таким образом, нас интересуют управляющие функции $\beta_1, \ldots, \beta_s$, которые наряду с условиями предложения 4.4 удовлетворяют еще и условию (5).

Возьмём функцию $\beta_\nu(k)$ при $\nu \in 1 : s-2$. Её значения на чётных индексах определены формулой (5). В § 8 показывается, что достаточно задать значения $\beta_\nu(2k+1)$ только при $k \in 0 : N_{\nu+2} - 1$, тогда функция $\beta_\nu(k)$ будет определена на всех нечётных индексах основного периода.

После того как построена функция $\beta_1(k)$, $k \in 0 : N-1$, остальные управляющие функции $\beta_2(k), \ldots, \beta_s(k)$ восстанавливаются с помощью процедуры прореживания (5), которую удобно переписать в виде

$$\beta_{\nu+1}(k) = \beta_\nu(2k), \qquad k \in 0 : N_\nu - 1. \tag{6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Размерность множества функций β_1 равна $N/4 - 1$.*

Отметим, что функции β_1 из предложения 8.1 полностью определяются своими значениями $y_k = \beta_1(k)$ при $k \in 1 : N_2 - 1$. Для иллюстрации приведём вид $\beta_1(k)$ на основном периоде при $N = 16$:

$$\beta_1 = (\tfrac{1}{2},\, y_1,\, y_2,\, y_3,\, 0,\, -y_3,\, -y_2,\, -y_1,\, -\tfrac{1}{2},\, -y_1,\, -y_2,\, -y_3,\, 0,\, y_3,\, y_2,\, y_1).$$

В качестве $\beta_\nu(k)$ предлагаются функции

$$\beta_\nu(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k \in 0 : N_{\nu+1} - 1 \text{ и } k \in 3N_{\nu+1} + 1 : N - 1, \\ 0 & \text{при } k = N_{\nu+1} \text{ и } k = 3N_{\nu+1}, \\ -\frac{1}{2} & \text{при } k \in N_{\nu+1} + 1 : 3N_{\nu+1} - 1; \end{cases} \tag{7}$$

$$\beta_\nu(k) = \tfrac{1}{2}\, U_\nu(k), \quad \beta_\nu(k) = U_\nu(k)/(1 + U_\nu^2(k)), \quad k \in 0 : N_{\nu-1} - 1.$$

Они обладают всеми свойствами, отмеченными в пункте 8.1, включая (5). На рисунках 1, 2, 3 изображены функции $\beta_1(k)$ указанного вида при $r = 2$ и $N = 32$.

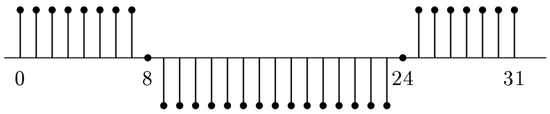

Рис. 1. График функции $\beta_1(k)$ вида (7)

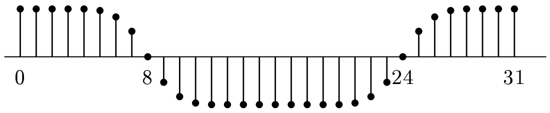

Рис. 2. График функции $\beta_1(k) = \frac{1}{2}\, U_1(k)$

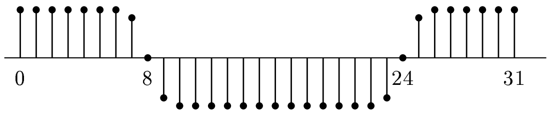

Рис. 3. График функции $\beta_1(k) = U_1(k)/(1 + U_1^2(k))$

В § 9 изучаются свойства базисных функций лифтинговых разложений. Пусть N-периодическая функция $\beta_1(k)$ вещественна, чётна, в нуле равна $\frac{1}{2}$ и сдвиг аргумента на N_1 лишь меняет ее знак на противоположный. Пусть остальные управляющие функции $\beta_2(k), \ldots, \beta_s(k)$ строятся с помошью прореживания по правилу (6). При этих предположениях исследуем некоторые свойства базисных функций вейвлетного разложения (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *При всех $\nu \in 1 : s-1$ справедливы тождества*

$$\varphi_{\nu+1}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \varphi_\nu(l)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,; \tag{8}$$

$$\psi_{\nu+1}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_1(j-2l)\, \psi_\nu(l)\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{9}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Задание φ_1, ψ_1 определяет φ_ν, ψ_ν для всех уровней ν.*

Рекуррентные соотношения, аналогичные (8), (9), имеют место и для базисных сигналов двойственных лифтинговых разложений.

Предположим, что управляющая функция β_ν удовлетворяет условию (4) и $\beta_\nu(0) = \frac{1}{2}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5. *При всех $j \in 0 : N-1$*

$$\psi_s(j) = -\varphi_{s-1}(j) + \tfrac{1}{2}\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.6. *При всех $\nu \in 1 : s$ верно равенство*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_\nu(j) = 2^\nu.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.7. *При $\nu \in 1 : s$ верны равенства*

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_\nu(2q) = 2^{\nu-1}, \qquad \sum_{q=0}^{N/2-1} \varphi_\nu(2q+1) = 2^{\nu-1}.$$

Если же сигналы $\beta_2, \ldots, \beta_s$ получаются из β_1 с помощью прореживания, то справедливы следующие равенства: при всех $\nu \in 1 : s$

$$\sum_{q=0}^{N/2-1} \psi_\nu(2q) = 0, \qquad \sum_{q=0}^{N/2-1} \psi_\nu(2q+1) = 0.$$

Вторая глава диссертации посвящена конечномерным фреймам.

В § 10 приводятся эквивалентные определения фреймов и жёстких фреймов. Начнём с общего определения конечномерных фреймов.

Ненулевые векторы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ образуют фрейм, если их линейная оболочка совпадает с $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{L}\big(\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}\big) = \mathbb{C}^n.$$

Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда эрмитова матрица $S = \Phi\Phi^*$ положительно определена.*

Матрицу S называют *матрицей фрейма.*

Напомним определение жёсткого фрейма.

Жёстким фреймом в $\mathbb{C}^n$ называется набор ненулевых векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$, такой, что при некотором $A > 0$ (константа фрейма) соответствующая матрица фрейма имеет вид

$$S = A\, I_n\,. \tag{10}$$

Приведём два эквивалентных определения жёсткого фрейма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{C}^n$ с константой $A > 0$ тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in \mathbb{C}^n$ допускает представление*

$$x = \tfrac{1}{A} \sum_{k=0}^{m-1} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k\,.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.4. *Система $\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является жёстким фреймом в $\mathbb{C}^n$ с константой $A > 0$ тогда и только тогда, когда верно соотношение*

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big|\langle x, \varphi_k \rangle\big|^2 = A\big\|x\big\|^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Константа фрейма A необходимо равна такой величине:

$$A = \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \|\varphi_k\|^2.$$

Существует ещё одно эквивалентное определение жёсткого фрейма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.5. *Система ненулевых векторов* $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ *из* $\mathbb{C}^n$ *при* $m \geqslant n$ *образует жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k,j=0}^{m-1} \bigl|\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle\bigr|^2 = \tfrac{1}{n}\Bigl(\sum_{k=0}^{m-1} \|\varphi_k\|^2\Bigr)^2.$$

В $\mathbb{R}^2$ жёсткий фрейм образуют единичные векторы

$$b_1^2 = \Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Bigr)^{\mathrm{T}}, \qquad b_2^2 = \Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Bigr)^{\mathrm{T}}, \qquad b_3^2 = \bigl(0, 1\bigr)^{\mathrm{T}}$$

(верхний индекс указывает на размерность вектора). Этот жёсткий фрейм называется *фреймом Мерседес-Бенц* (см. рисунок 4).

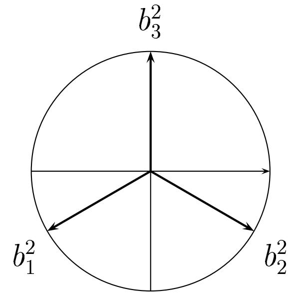

Рис. 4. Фрейм Мерседес-Бенц в пространстве $\mathbb{R}^2$

Аналогичные фреймы были построены в $\mathbb{R}^n$ при любом $n \geqslant 2$ (А. Б. Певный). Приведём соответствующие формулы. Зафиксируем некоторое $n > 2$. Допустим, что жёсткий фрейм $\{b_j^{n-1}\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ уже построен. Фрейм $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ определяется конструктивно. Положим $b_{n+1}^n = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ и

$$b_j^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\, b_j^{n-1} \\ -\frac{1}{n} \end{pmatrix}, \qquad j \in 1:n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.7. *Система векторов* $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ *образует жёсткий фрейм в* $\mathbb{R}^n$ *с константой* $A = 1 + \frac{1}{n}$.

В § 11 определяются обобщённые гармонические фреймы. Вводятся системы векторов специального вида, где каждый следующий вектор получается умножением предыдущего на унитарную матрицу. Указываются условия, при выполнении которых такая система может быть преобразована в обобщённый гармонический фрейм.

Пусть $m > n > 1$. Возьмём комплексное число c, $|c| = 1$, и обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_n$ попарно различные корни m-й степени из c. Возьмём также n комплексных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, по модулю равных единице. Векторы

$$\psi_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j c_j^k\,, \qquad j \in 1:n, \quad k \in 0:m-1,$$

образуют *обобщённый гармонический фрейм.* В частности, $\psi_0(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, b_j$, $j \in 1:n$. Ясно, что $\|\psi_k\| = 1$ при всех $k \in 0:m-1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *Обобщённый гармонический фрейм* $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$ *является жёстким фреймом с константой* $A = \frac{m}{n}$.

Пусть по-прежнему $m > n > 1$. Возьмём унитарную матрицу U порядка n, единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим последовательность единичных векторов

$$\varphi_k = U\varphi_{k-1}\,, \qquad k = 1, \ldots, m-1.$$

Обозначим $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$.

Запишем спектральное разложение унитарной матрицы U:

$$U = P\Lambda P^*,$$

где P — матрица, столбцами которой являются ортонормированные собственные векторы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ матрицы U, и Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, с диагональными элементами, по модулю равными единице. Систему векторов

$$\psi_k = P^*\varphi_k\,, \qquad k \in 0 : m-1, \tag{11}$$

обозначим через Ψ.

ТЕОРЕМА 11.1. *Если Φ — жёсткий фрейм, то Ψ — обобщённый гармонический фрейм.*

Условие жёсткости фрейма Φ в теореме 11.1 можно заменить условиями на унитарную матрицу U и начальный вектор φ_0.

ТЕОРЕМА 11.2. *Система векторов Ψ вида* (11) *является обобщённым гармоническим фреймом тогда и только тогда, когда*

(α) *собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы U суть попарно различные корни m-й степени из некоторого числа $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$;*

(β) $\bigl|\langle \varphi_0, p_j \rangle\bigr| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *при всех $j \in 1 : n$.*

В § 12 устанавливается критерий, когда система векторов специального вида образует жёсткий фрейм. Пусть U — унитарная матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, по модулю равными единице, и соответствующими ортонормированными собственными векторами $p_1, \ldots, p_n$. Возьмём единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим при $m \geqslant n$ систему векторов

$$\bigl\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\bigr\}. \tag{12}$$

Когда система (12) будет жёстким фреймом?

ТЕОРЕМА 12.1. *Для того чтобы система* (12) *была жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(α) *собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы U суть попарно различные корни степени m из некоторого числа $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$;*

(β) $\bigl|\langle \varphi_0, p_j \rangle\bigr| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *при всех $j \in 1 : n$.*

Теперь зададимся вопросом, когда система векторов вида (12) образует фрейм.

ТЕОРЕМА 12.2. *Для того чтобы система* (12) *была фреймом в $\mathbb{C}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(α) *собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы U попарно различны;*

(β) $\bigl|\langle \varphi_0, p_j \rangle\bigr| \neq 0$ *при всех $j \in 1 : n$.*

Отметим, что условия (α) и (β) теоремы 12.2 не зависят от m.

В § 13 указывается, когда система специального вида является циклическим фреймом. Нормированный жёсткий фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ назовём *циклическим с константой* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, если выполняется соотношение

$$\langle \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle, \qquad k, s \in 0 : m-1, \tag{13}$$

где $\varphi_m = c\,\varphi_0$.

ТЕОРЕМА 13.1. *Для того чтобы система векторов* $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ *из* $\mathbb{C}^n$ *при* $m \geqslant n$ *была циклическим с константой* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, *нормированным жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась унитарная матрица* U *порядка* n, *такая, что*

$$\varphi_k = U^k \varphi_0\,, \qquad k \in 1 : m-1,$$

причём все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* U *суть попарно различные корни степени* m *из* c, *а соответствующие ортонормированные собственные векторы* $p_1, \ldots, p_n$ *удовлетворяют условию*

$$\big|\langle \varphi_0, p_j \rangle\big| = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad j \in 1 : n. \tag{14}$$

Оказывается, что фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве также можно представить как жёсткий фрейм специального вида. В § 14 устанавливается простое рекуррентное соотношение для соответствующей унитарной матрицы, которое, в частности, позволяет вычислить спектр этой матрицы.

Введём квадратную матрицу U_n порядка n с помощью рекуррентного соотношения

$$U_1 = [-1];$$

$$U_k = \begin{bmatrix} u_1^{k-1}, & \ldots, & u_{k-2}^{k-1}, & \frac{1}{k}\, u_{k-1}^{k-1}, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\, u_{k-1}^{k-1} \\ 0, & \ldots, & 0, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}, & -\frac{1}{k} \end{bmatrix}, \qquad k = 2, \ldots, n,$$

где u_j^{k-1} — j-й столбец матрицы U_{k-1}. Как и ранее, через $\{b_j^n\}_{j=1}^{n+1}$ обозначаем фрейм Мерседес–Бенц в пространстве $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 14.1. *Справедливы формулы*

$$U_n\, b_j^n = b_{j+1}^n\,, \quad j \in 1 : n; \qquad U_n\, b_{n+1}^n = b_1^n. \tag{15}$$

Именно это имеется в виду под циклическим свойством фрейма Мерседес–Бенц.

Выясним свойства матрицы U_n при $n \geqslant 2$.

ТЕОРЕМА 14.2. *Матрица* U_n *— ортогональная. Её собственными числами являются* $\omega_{n+1}^1, \omega_{n+1}^2, \ldots, \omega_{n+1}^n$.

Параграф 15 посвящён анализу следующей задачи: как связаны собственные числа матрицы фрейма и нормы его элементов? Описывается алгоритм построения фрейма с заданной матрицей фрейма и заданными нормами элементов.

Рассмотрим фрейм в пространстве $\mathbb{C}^n$ и канонический двойственный фрейм. С произвольным двойственным фреймом $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ свяжем величину

$$P = \sum_{j=1}^{m} \big\|\psi_j\big\|^2.$$

В § 16 доказана следующая

ТЕОРЕМА 16.1. *Канонический двойственный фрейм является единственным двойственным фреймом, на котором величина P достигает наименьшего значения.*

В диссертационной работе имеется приложение, посвящённое факторизации полифазных матриц. Полифазная матрица сопоставляется паре полиномов Лорана, которые соответствуют фильтрам нижних и верхних частот. Быстрый алгоритм вейвлетного разложения получается при факторизации полифазной матрицы. В. Свелденс и И. Добеши предложили метод факторизации, основанный на алгоритме Евклида для полиномов Лорана. Деление с остатком полиномов Лорана неединственно. Это позволяет получать различные варианты факторизации полифазной матрицы и выбирать среди них наиболее простой вариант. В приложении проводится детальный анализ методов факторизации полифазных матриц. В качестве одного из примеров рассматривается факторизация полифазной матрицы, соответствующей паре фильтров (9–7).

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Малоземов В. Н., Соловьева Н. А. *Параметрические лифтинговые схемы вейвлетных разложений* // Проблемы матем. анализа. Вып. 42. 2009. С. 15–41 (статья переведена на англ. язык: Journal of Math. Sciences. 2009. V. 162. No. 3. P. 319–347).

2. Соловьева Н. А. *О жестких фреймах специального вида* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2009. Вып. 3. С. 79–85.

Другие публикации:

3. Малоземов В. Н., Певный А. Б., Селянинова (Соловьева) Н. А. *Прямая лифтинговая схема* // Вестник Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 6. 2006. С. 95–110.

4. Малоземов В. Н., Соловьева Н. А. *Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц* // Электронный архив препринтов С.-Петербургского матем. общества. Препринт 2009–10. 6 с. (http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2009/index.html#10)

5. Малоземов В. Н., Соловьева Н. А. *О матрице фрейма* // Вестник Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 10. 2009. С. 75–86.