ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ МЕТОДОМ SUBDIVISION*

Н. В. Чашников
nik239@list.ru

1 октября 2011 г.

В докладе рассматриваются математические основы метода subdivision [1]. Описан вариант метода subdivision, позволяющий строить кривые, которые аналитически определяются сплайнами с равномерно распределёнными узлами.

1°. Введём последовательность нормализованных B-сплайнов с целочисленными узлами. B-сплайн нулевого порядка $N_0(t)$ задаётся формулой

$$N_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки:

$$N_{\nu+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N_\nu(t-s) N_0(s)\, ds = \int_0^1 N_\nu(t-s)\, ds.$$

В частности,

$$N_1(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 2-t, & \text{если } t \in (1, 2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рис. 1 представлены графики сплайнов N_0, N_1 и N_2.

ЛЕММА 1. *При всех натуральных r сплайн N_r обладает следующими свойствами:*

1) *функция N_r принадлежит классу C^{r-1};*

2) *на каждом отрезке $[k, k+1]$, где k — целое, $N_r(t)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше r.*

---

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

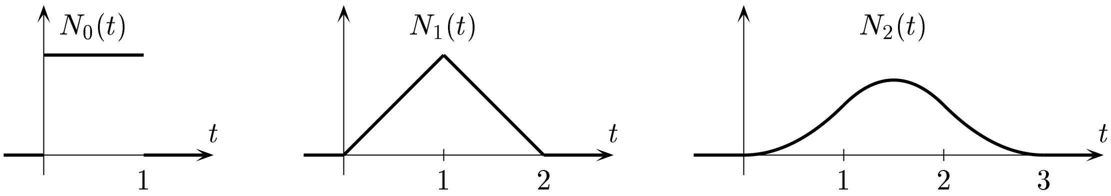

Рис. 1. B-сплайны малых порядков

Доказательство. Применим метод математической индукции. База индукции при $r = 1$, очевидно, выполняется. Предположим, что свойства 1 и 2 справедливы для некоторого натурального r. Перепишем рекуррентное соотношение в виде

$$N_{r+1}(t) = \int_0^1 N_r(t-s)\,ds = \int_{t-1}^t N_r(s)\,ds. \tag{1}$$

Дифференцируя последнее выражение, получаем

$$N'_{r+1}(t) = N_r(t) - N_r(t-1).$$

По индукционному предположению $N_r \in C^{r-1}$. Следовательно, $N_{r+1} \in C^r$. Если t принадлежит отрезку $[k, k+1]$, где k — целое, то $t - 1 \in [k-1, k]$, поэтому $N'_{r+1}(t)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше r. Значит, N_{r+1} на этом отрезке является полиномом степени не выше $r+1$.

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *При всех $r \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\operatorname{supp} N_r \subset [0, r+1], \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_r(t)\,dt = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_r(t-j) = 1 \quad \textit{при всех } t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Доказательство. При $r = 0$ справедливость соотношений (2)–(4) проверяется непосредственно. Предположим, что они выполняются для N_r. Сделаем индукционный переход от r к $r+1$.

Если $N_{r+1}(t)$ отлично от нуля при некотором t, то в силу (1) и индукционного предположения пересечение $[t-1, t] \cap [0, r+1]$ должно быть непусто, то есть $t \in [0, r+2]$. Следовательно, $\operatorname{supp} N_{r+1} \subset [0, r+2]$.

Воспользуемся равенством (1) и доказанными ограничениями на носители сплайнов N_{r+1} и N_r. Запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{r+1}(t)\,dt = \int_0^{r+2} N_{r+1}(t)\,dt = \int_0^{r+2} dt \int_{t-1}^{t} N_r(s)\,ds =$$
$$= \int_{-1}^{r+2} ds \int_s^{s+1} N_r(s)\,dt = \int_{-1}^{r+2} N_r(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} N_r(s)\,ds = 1.$$

Проверим справедливость тождества (4) для сплайна N_{r+1}. Имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{r+1}(t-j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{t-j-1}^{t-j} N_r(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} N_r(s)\,ds = 1.$$

Лемма доказана. □

ТЕОРЕМА 1. *При всех $r \geqslant 0$ справедливо соотношение*

$$N_r(t) = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r+1} C_{r+1}^k\, N_r(2t-k). \tag{5}$$

Доказательство. При $r = 0$ тождество (5) очевидно:

$$N_0(t) = N_0(2t) + N_0(2t-1).$$

Сделаем индукционный переход от $r-1$ к r. Имеем

$$N_r(t) = \frac{1}{2^{r-1}} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \int_0^1 N_{r-1}(2t-2s-k)\,ds = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \int_0^2 N_{r-1}(2t-\sigma-k)\,d\sigma.$$

Поскольку

$$\int_1^2 N_{r-1}(2t-k-\sigma)\,d\sigma = \int_0^1 N_{r-1}(2t-(k+1)-s)\,ds,$$

то

$$N_r(t) = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \big[N_r(2t-k) + N_r(2t-k-1)\big] =$$
$$= \frac{1}{2^r}\left[N_r(2t) + N_r(2t-r-1) + \sum_{k=1}^{r} (C_r^k + C_r^{k+1}) N_r(2t-k)\right] =$$
$$= \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r+1} C_{r+1}^k\, N_r(2t-k).$$

Теорема доказана. □

2°. Пусть $\{\mathbf{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность векторов из пространства $\mathbb{R}^n$, в которой лишь конечное число членов отлично от нуля. *Производящей функцией* последовательности $\mathbf{f}_k$ называется функция

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{f}_k\, z^k.$$

В дальнейшем будем опускать множества суммирования, если суммирование ведётся по всем целым числам. Заметим, что фактически в сумме конечное количество слагаемых, так что вопросы сходимости не возникают.

Приведём некоторые свойства производящих функций.

1) Пусть $\mathbf{f}(z)$ и $\mathbf{g}(z)$ — производящие функции последовательностей $\{\mathbf{f}_k\}$ и $\{\mathbf{g}_k\}$ соответственно. Тогда $\mathbf{f}(z)+\mathbf{g}(z)$ — производящая функция последовательности $\{\mathbf{f}_k+\mathbf{g}_k\}$, а $\mathbf{f}(z)-\mathbf{g}(z)$ — производящая функция последовательности $\{\mathbf{f}_k-\mathbf{g}_k\}$.

2) Если $\mathbf{f}(z)$ — производящая функция последовательности $\{\mathbf{f}_k\}$, то для последовательности $\{\mathbf{f}_k-\mathbf{f}_{k-1}\}$ производящей функцией будет $(1-z)\mathbf{f}(z)$.

3) Для любой последовательности $\{\mathbf{f}_k\}$ и её производящей функции $\mathbf{f}(z)$ справедливы равенства

$$\sum_k \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(1), \qquad \sum_k (-1)^k\, \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(-1),$$
$$\sum_k \mathbf{f}_{2k} = \frac{\mathbf{f}(1)+\mathbf{f}(-1)}{2}, \qquad \sum_k \mathbf{f}_{2k+1} = \frac{\mathbf{f}(1)-\mathbf{f}(-1)}{2}.$$

В случае $\mathbb{R}^1$ получаем, что указанные свойства справедливы и для последовательностей вещественных чисел.

3°. Пусть задано натуральное число r и последовательность векторных коэффициентов $\{\mathbf{p}_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из пространства $\mathbb{R}^n$, в которой только конечное количество членов отлично от нуля. Обозначим через $\mathbf{p}^0(z)$ производящую функцию последовательности $\{\mathbf{p}_k^0\}$. Рассмотрим сплайн

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^0\, N_r(t-k), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Из леммы 1 следует, что функция $\mathbf{f}(t)$ принадлежит классу C^{r-1} и на каждом отрезке вида $[j, j+1]$, где j — целое, совпадает с некоторым полиномом степени не выше r.

Перепишем масштабирующее уравнение (5) в виде

$$N_r(t) = \sum_k s_k\, N_r(2t-k), \tag{6}$$

где

$$s_k = \begin{cases} \frac{C_{r+1}^k}{2^r}, & \text{если } k \in 0 : r+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Укажем производящую функцию последовательности $\{s_k\}$:

$$s(z) = \sum_k s_k\, z^k = \sum_{k=0}^{r+1} \frac{C_{r+1}^k}{2^r}\, z^k = \frac{(1+z)^{r+1}}{2^r}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $m \geqslant 0$ сплайн $\mathbf{f}(t)$ можно разложить по сдвигам B-сплайнов кратного аргумента:*

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^m\, N_r(2^m\, t - k), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где в последовательности коэффициентов $\{\mathbf{p}_k^m\}_{k\in\mathbb{Z}}$ лишь конечное число членов отлично от нуля. При этом производящие функции $\mathbf{p}^m(z)$ последовательностей коэффициентов определяются рекуррентным соотношением

$$\mathbf{p}^m(z) = s(z)\, \mathbf{p}^{m-1}(z^2), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Доказательство проведём методом математической индукции. База индукции при $m = 0$ справедлива по определению сплайна $\mathbf{f}(t)$. Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m для $m \geqslant 1$. Пользуясь индукционным предположением и мастшабирующим уравнением (6), записываем

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1} N_r(2^{m-1}\, t - k) = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1} \sum_j s_j\, N_r(2^m\, t - 2k - j).$$

Заменим во внутренней сумме переменную j на $l = 2k + j$:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1} \sum_l s_{l-2k}\, N_r(2^m\, t - l) = \sum_l N_r(2^m\, t - l) \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, s_{l-2k}.$$

Положив

$$\mathbf{p}_l^m = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, s_{l-2k},$$

получим разложение (7).

Проверим справедливость рекуррентной формулы (8) для производящей функции $\mathbf{p}^m(z)$. Имеем

$$\mathbf{p}^m(z) = \sum_l \mathbf{p}_l^m\, z^l = \sum_l \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, s_{l-2k}\, z^{2k}\, z^{l-2k} = \sum_k \mathbf{p}_k^{m-1}\, z^{2k} \sum_j s_j\, z^j = \\ = \mathbf{p}^{m-1}(z^2)\, s(z).$$

Теорема доказана. $\square$

Опишем алгоритм Лейна-Ризенфельда (Lane-Riesenfeld algorithm), позволяющий быстро вычислить набор коэффициентов $\mathbf{p}_k^m$ по предыдущему набору $\mathbf{p}_k^{m-1}$. Подставим в формулу (8) значение функции $s(z)$ и запишем

$$\mathbf{p}^m(z) = \big(\mathbf{p}^{m-1}(z^2)(1+z)\big)\underbrace{\frac{1+z}{2}\cdot\frac{1+z}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+z}{2}}_{r\ \text{сомножителей}}.$$

Выражение в правой части даёт пошаговое преобразование функции $\mathbf{p}^{m-1}(z)$ в $\mathbf{p}^m(z)$: сначала от $\mathbf{p}^{m-1}(z)$ переходим к $\mathbf{p}^{m-1}(z^2)(1+z)$, а потом r раз умножаем на $\frac{1+z}{2}$. Рассмотрим преобразования последовательности коэффициентов, соответствующие этим операциям над производящей функцией. На первом шаге последовательность

$$\ldots, \mathbf{p}_0^{m-1}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \ldots$$

преобразуется в последовательность

$$\ldots, \mathbf{p}_0^{m-1}, \mathbf{p}_0^{m-1}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \ldots.$$

Умножение производящей функции на $\frac{1+z}{2}$ соответствует замене каждого члена последовательности на половину его суммы с предыдущим членом. После второго шага получаем последовательность

$$\ldots, \mathbf{p}_0^{m-1}, \frac{\mathbf{p}_0^{m-1}+\mathbf{p}_1^{m-1}}{2}, \mathbf{p}_1^{m-1}, \frac{\mathbf{p}_1^{m-1}+\mathbf{p}_2^{m-1}}{2}, \mathbf{p}_2^{m-1}, \ldots, \tag{9}$$

после третьего — последовательность

$$\ldots, \frac{3\mathbf{p}_0^{m-1}+\mathbf{p}_1^{m-1}}{4}, \frac{\mathbf{p}_0^{m-1}+3\mathbf{p}_1^{m-1}}{4}, \frac{3\mathbf{p}_1^{m-1}+\mathbf{p}_2^{m-1}}{4}, \frac{\mathbf{p}_1^{m-1}+3\mathbf{p}_2^{m-1}}{4}, \ldots, \tag{10}$$

и так далее. Если порядок r равен единице, то процесс останавливается после второго шага, и последовательность (9) и есть $\{\mathbf{p}_k^m\}$. Если $r = 2$, то в качестве $\{\mathbf{p}_k^m\}$ берётся последовательность (10).

4°. Исследуем поведение последовательностей $\{\mathbf{p}_k^m\}$ при неограниченном увеличении m.

Положим $\Delta\mathbf{p}_k^m = \mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_{k-1}^m$ при $m \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Производящая функция $\Delta\mathbf{p}^m$ последовательности $\{\Delta\mathbf{p}_k^m\}$ определяется формулой $\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z)$.

В качестве нормы векторов пространства $\mathbb{R}^n$ будем использовать евклидову норму.

ЛЕММА 3. *При всех $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| \leqslant \frac{1}{2^m} \max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^0\|. \tag{11}$$

Доказательство проведём методом математической индукции. База индукции при $m = 0$ очевидно. Сделаем индукционный переход от $m-1$ к m для $m \geqslant 1$.

Воспользуемся рекуррентным соотношением (8). Запишем

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = (1-z)\mathbf{p}^m(z) = (1-z)s(z)\,\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \frac{(1-z)(1+z)^{r+1}}{2^r}\,\mathbf{p}^{m-1}(z^2) =$$
$$= \Big(\frac{1+z}{2}\Big)^r (1-z^2)\mathbf{p}^{m-1}(z^2) = \Big(\frac{1+z}{2}\Big)^r \Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2).$$

Введя обозначение $d(z) = \big(\frac{1+z}{2}\big)^r$, придём к рекуррентному соотношению для производящей функции $\Delta\mathbf{p}^m(z)$:

$$\Delta\mathbf{p}^m(z) = d(z)\,\Delta\mathbf{p}^{m-1}(z^2). \tag{12}$$

Пусть d_k — коэффициент при z^k у полинома $d(z)$. Ясно, что

$$d_k = \begin{cases} \frac{C_r^k}{2^r}, & \text{если } k \in 0:r, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

но нам достаточно того, что все d_k неотрицательны. Перепишем равенство (12) в виде

$$\sum_k \Delta\mathbf{p}_k^m\, z^k = \sum_j d_j\, z^j \sum_l \Delta\mathbf{p}_l^{m-1} z^{2l} = \sum_l \sum_j d_j\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-1} z^{j+2l}.$$

Заменяя переменную j на $k = j + 2l$, получаем

$$\sum_k \Delta\mathbf{p}_k^m\, z^k = \sum_k \sum_l d_{k-2l}\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-1} z^k.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z. Придём к равенству

$$\Delta\mathbf{p}_k^m = \sum_l d_{k-2l}\, \Delta\mathbf{p}_l^{m-1}.$$

Далее,

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| = \max_k \Big\|\sum_l d_{k-2l}\,\Delta\mathbf{p}_l^{m-1}\Big\| \leqslant \max_l \|\Delta\mathbf{p}_l^{m-1}\|\,\max_k \sum_l |d_{k-2l}|.$$

В силу неотрицательности d_{k-2l} имеем

$$\max_k \sum_l |d_{k-2l}| = \max_k \sum_l d_{k-2l} = \max\Big\{\sum_l d_{2l},\ \sum_l d_{2l+1}\Big\} =$$
$$= \max\Big\{\frac{d(1)+d(-1)}{2},\ \frac{d(1)-d(-1)}{2}\Big\} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\max_k \|\Delta\mathbf{p}_k^m\| \leqslant \frac{1}{2}\,\max_l \|\Delta\mathbf{p}_l^{m-1}\|.$$

Принимая во внимание индукционное предположение, приходим к неравенству (11).

Лемма доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *Для всех $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\max_j \Big\|\mathbf{f}\big(\tfrac{j}{2^m}\big) - \mathbf{p}_j^m\Big\| \leqslant \frac{c}{2^m}, \tag{13}$$

где $c = (r+1)\max_l \|\Delta\mathbf{p}_l^0\|$.

Доказательство. В силу (7) имеем

$$\max_j \Big\|\mathbf{f}\big(\tfrac{j}{2^m}\big) - \mathbf{p}_j^m\Big\| = \max_j \Big\|\sum_k \mathbf{p}_k^m\,N_r(j-k) - \mathbf{p}_j^m\Big\|.$$

Воспользуемся тождеством (4) и перепишем последнюю сумму в виде

$$\sum_k \mathbf{p}_k^m\,N_r(j-k) - \sum_k \mathbf{p}_j^m\,N_r(j-k) = \sum_k (\mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_j^m) N_r(j-k).$$

Из соотношения (2) следует, что слагаемые последней суммы могут быть отличны от нуля только если $j-k \in 0:r+1$. Но для таких слагаемых справедливо неравенство

$$\|\mathbf{p}_k^m - \mathbf{p}_j^m\| \leqslant (r+1)\max_l \|\Delta\mathbf{p}_l^m\| \leqslant \frac{r+1}{2^m}\,\max_l \|\Delta\mathbf{p}_l^0\| = \frac{c}{2^m}.$$

Приходим к оценке

$$\max_j \Big\|\mathbf{f}\big(\tfrac{j}{2^m}\big) - \mathbf{p}_j^m\Big\| \leqslant \max_j \sum_k \frac{c}{2^m} |N_r(j-k)|.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться неотрицательностью B-сплайна N_r и тождеством (4). $\square$

5°. Покажем, как изложенные выше результаты применяются в геометрическом моделировании для построения кривых.

Пусть задана некоторая ломаная на плоскости или в трёхмерном пространстве и фиксировано натуральное число r. Возьмём вершины ломаной в качестве начальной последовательности $\{\mathbf{p}_k^0\}$, полагая все остальные члены нулевыми. Пользуясь алгоритмом Лейна-Ризенфельда, по последовательности $\{\mathbf{p}_k^0\}$ найдём последовательность $\{\mathbf{p}_k^1\}$, по ней — последовательность $\{\mathbf{p}_k^2\}$ и так далее. Если отбросить лишние нулевые члены, каждая из построенных последовательностей задаёт ломаную. Согласно неравенству (13), при неограниченном возрастании m полученные таким способом ломаные с экспоненциальной скоростью сходятся к кривой, определяемой сплайном $\mathbf{f}(t)$. Поэтому при сравнительно небольших m ломаные, задаваемые последовательностями $\{\mathbf{p}_k^m\}$, дают достаточно хорошее приближение предельной кривой. Описанный процесс построения кривых является одним из вариантом метода, называемого *subdivision*. Более подробные описания этого и других методов subdivision, используемых для построения кривых и поверхностей, даны в книге [1].

ПРИМЕР 1. Пусть $r = 2$. В таком случае алгоритм Лейна-Ризенфельда заканчивается после третьего шага, преобразуя последовательность $\{\mathbf{p}_k^{m-1}\}$ в последовательность $\{\mathbf{p}_k^m\}$ вида (10). Геометрически это означает, что для перехода от ломаной $\{\mathbf{p}_k^{m-1}\}$ к $\{\mathbf{p}_k^m\}$ надо взять на каждом отрезке ломаной две точки, делящие отрезок в отношении $1 : 2 : 1$, после чего отбросить вершины исходной ломаной и взять полученные точки в качестве вершин новой ломаной. Данный метод последовательного преобразования ломаных называется алгоритмом Чайкина.

Приведём пример работы алгоритма Чайкина в случае, когда начальная ломаная образует квадрат (рис. 2). На рис. 3 показан переход от ломаной $\{\mathbf{p}_k^0\}$ к $\{\mathbf{p}_k^1\}$, на рис. 4 — от $\{\mathbf{p}_k^1\}$ к $\{\mathbf{p}_k^2\}$. При этом исходная ломаная изображена штриховой линией, а преобразованная ломаная — сплошной линией и её вершины отмечены кружками. На рис. 5 представлена ломаная, задаваемая последовательностью $\{\mathbf{p}_k^3\}$.

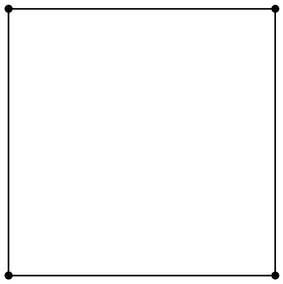

Рис. 2. $\{\mathbf{p}_k^0\}$

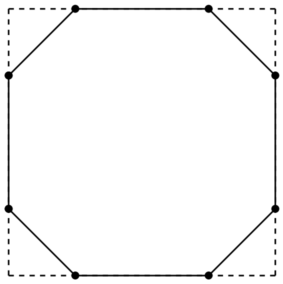

Рис. 3. $\{\mathbf{p}_k^1\}$

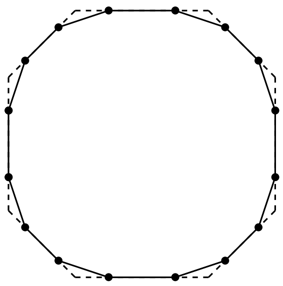

Рис. 4. $\{\mathbf{p}_k^2\}$

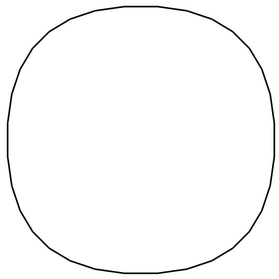

Рис. 5. $\{\mathbf{p}_k^3\}$

ПРИМЕР 2. Пусть $r = 3$. Рассмотрим первые шаги метода subdivision для ломаной, изображённой на рис. 6. На рис. 7 показан переход от ломаной $\{\mathbf{p}_k^0\}$ к $\{\mathbf{p}_k^1\}$, на рис. 8 — от $\{\mathbf{p}_k^1\}$ к $\{\mathbf{p}_k^2\}$. На рис. 9 представлена ломаная, задаваемая последовательностью $\{\mathbf{p}_k^3\}$.

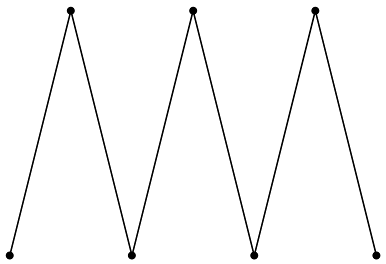

Рис. 6. $\{\mathbf{p}_k^0\}$

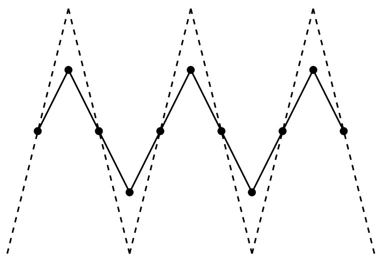

Рис. 7. $\{\mathbf{p}_k^1\}$

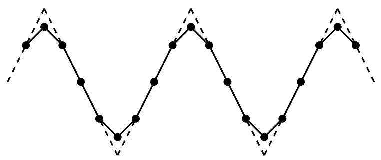

Рис. 8. $\{\mathbf{p}_k^2\}$

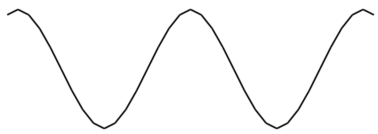

Рис. 9. $\{\mathbf{p}_k^3\}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersson L. E., Stewart N. F. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces.* SIAM, 2010.