# ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА И СОСТАВНЫЕ КРИВЫЕ БЕЗЬЕ *

В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев, М. И. Григорьев

malv@gamma.math.spbu.ru mg@land.ru

14 декабря 2004 г.

**1°**. При натуральном $n$ алгебраический полином

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, C_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k} \tag{1}$$

называется *полиномом в форме Бернштейна* или просто *полиномом Бернштейна* [1]. Очевидно, что

$$B(0) = y_0 \,, \qquad B(1) = y_n \,. \tag{2}$$

Базисные полиномы $p_{nk}(x) = C_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k}$ обладают следующими свойствами:

$$p_{nk}(x) > 0 \quad \text{при } x \in (0,1) \text{ и всех } k = 0, 1, \ldots, n\,; \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \equiv 1\,. \tag{4}$$

**ЛЕММА 1.** *При всех вещественных $x$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \, p_{nk}(x) = x\,. \tag{5}$$

Доказательство. Равенство (5) достаточно проверить при $x \in (0,1)$. Имеем

$$\bigl(\ln p_{nk}(x)\bigr)' = \frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} = \frac{n}{x(1-x)} \left(\frac{k}{n} - x\right).$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

Вместе с тем, $\bigl(\ln p_{nk}(x)\bigr)' = p'_{nk}(x)/p_{nk}(x)$. Значит,

$$p'_{nk}(x) = \frac{n}{x(1-x)}\left(\frac{k}{n} - x\right)p_{nk}(x)\,.$$

Теперь продифференцируем тождество (4). Получим

$$\frac{n}{x(1-x)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)p_{nk}(x) \equiv 0\,.$$

Отсюда и из (4) следует (5). □

Обозначим $y_k^{(0)} = y_k,\ k \in 0:n$.

**ТЕОРЕМА 1.** *Справедлива формула*

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(1)}\,p_{n-1,k}(x)\,, \tag{6}$$

*где* $y_k^{(1)} = (1-x)\,y_k^{(0)} + x\,y_{k+1}^{(0)}$.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(1)}\,C_{n-1}^k\,x^k\,(1-x)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(0)}\,C_{n-1}^k\,x^k\,(1-x)^{n-k} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n} y_k^{(0)}\,C_{n-1}^{k-1}\,x^k\,(1-x)^{n-k} = y_0^{(0)}\,(1-x)^n + y_n^{(0)}\,x^n +$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1} y_k^{(0)}\,\bigl(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\bigr)\,x^k\,(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} y_k\,C_n^k\,x^k\,(1-x)^{n-k}\,.$$

Мы воспользовались тем, что $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$ при $k \in 1:n-1$. □

Преобразование (6) можно продолжить:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n-2} y_k^{(2)}\,p_{n-2,k}(x)\,,$$

где $y_k^{(2)} = (1-x)\,y_k^{(1)} + x\,y_{k+1}^{(1)}$, и т. д. В результате получим

$$B(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k^{(n-1)}\,p_{1k}(x) = (1-x)\,y_0^{(n-1)} + x\,y_1^{(n-1)} =: y_0^{(n)}\,.$$

Таким образом, выведено рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} &y_k^{(i)} = (1-x)\, y_k^{(i-1)} + x\, y_{k+1}^{(i-1)}\,, \qquad i=1,\dots,n\,, \quad k=0,1,\dots,n-i\,;\\ &y_k^{(0)} = y_k\,, \qquad k=0,1,\dots,n\,, \end{aligned} \tag{7}$$

которое позволяет вычислить значение $B(x) = y_0^{(n)}$ в фиксированной точке $x \in (0,1)$.

**2**$^\circ$. Перепишем формулу (1) в виде

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\, y_k\,.$$

С учетом свойств (3) и (4) коэффициентов $p_{nk}(x)$ заключаем, что число $B(x)$ при фиксированном $x \in (0,1)$ есть выпуклая комбинация чисел $y_0, y_1, \dots, y_n$. Рекуррентное соотношение (7) представляет собой быстрый способ вычисления этой выпуклой комбинации.

Введём векторный полином Бернштейна

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\, Y_k\,, \tag{8}$$

где $Y_k = (y_{k1}, \dots, y_{ks})$. Согласно (2)

$$\mathcal{B}(0) = Y_0\,, \qquad \mathcal{B}(1) = Y_n\,.$$

Рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} &Y_k^{(i)} = (1-x)\, Y_k^{(i-1)} + x\, Y_{k+1}^{(i-1)}\,, \qquad i=1,\dots,n\,, \quad k=0,1,\dots,n-i\,;\\ &Y_k^{(0)} = Y_k\,, \qquad k=0,1,\dots,n\,, \end{aligned} \tag{9}$$

позволяет вычислить вектор $\mathcal{B}(x) = Y_0^{(n)}$ при фиксированном $x \in (0,1)$ как выпуклую комбинацию векторов $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$. Когда параметр $x$ пробегает весь отрезок $[0,1]$, вектор $\mathcal{B}(x)$ описывает кривую в пространстве $\mathbb{R}^s$, соединяющую точки $Y_0$ и $Y_n$. Такая кривая называется *кривой Безье* [2]. По существу, кривая Безье определяется соотношением (9).

Рассмотрим частный случай: $s=2$, $Y_k = \big(k/n, y_k\big)$, $k \in 0:n$. На основании (8) и (5) получим $\mathcal{B}(x) = \big(x, B(x)\big)$, $x{\in}[0,1]$. Схема (9) позволяет построить график полинома Бернштейна (рис. 1). Отметим, что абсцисса точки $Y_k^{(i)}$ в данном случае равна $\dfrac{i\,x+k}{n}$.

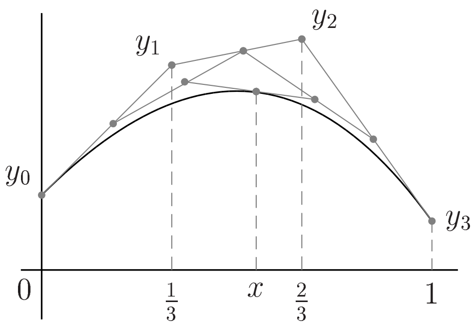


Рис. 1. График полинома Бернштейна при $n = 3$

Точки $Y_k = (y_{k1}, y_{k2})$, $k \in 0 : n$, порождают произвольную кривую Безье на плоскости (рис. 2), а точки $Y_k = (y_{k1}, y_{k2}, y_{k3})$, $k \in 0 : n$, — пространственную кривую Безье.

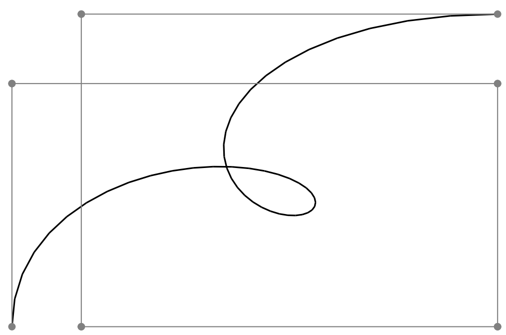

Рис. 2. Кривая Безье на плоскости

**3**°. Рассмотрим простейший вариант задачи о построении гладких составных кривых Безье. Предварительно установим еще одно свойство полиномов Бернштейна.

**ЛЕММА 2.** *Полином Бернштейна* (1) *допускает представление*

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\Delta^i y_0\right) C_n^i \, x^i \,, \tag{10}$$

*где* $\Delta^i y_0 = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \, C_i^k \, y_k$ *— нисходящая конечная разность $i$-го порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, C_n^k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i\, (-1)^{n-k-i}\, x^{n-i} = \\ = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} y_k\, C_n^k\, C_{n-k}^i\, (-1)^{n-k-i}\, x^{n-i}\,.$$

Поскольку $C_n^k\, C_{n-k}^i = C_n^i\, C_{n-i}^k$, то

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left( \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^{n-i-k}\, C_{n-i}^k y_k \right) x^{n-i} = \\ = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} \left(\Delta^{n-i} y_0\right) x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\Delta^i y_0\right) x^i\,.$$

Лемма доказана. □

Полином (1) соответсвует отрезку $[0,1]$. Запишем полином Бернштейна степени $m$, соответствующий отрезку $[-1,0]$:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} y_{-m+k}\, C_m^k\, (1+x)^k\, (-x)^{m-k} = \\ = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, y_{-k}\, C_m^k\, x^k\, (1+x)^{m-k}\,. \tag{11}$$

**ЛЕММА 3.** *Полином $Q(x)$ допускает представление*

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m} \left(\nabla^i y_0\right) C_m^i\, x^i\,, \tag{12}$$

*где* $\nabla^i y_0 = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k\, C_i^k\, y_{-k}$ *— восходящая конечная разность $i$-го порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, y_{-k}\, C_m^k \sum_{i=0}^{m-k} C_{m-k}^i\, x^{m-i} = \\ = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-i} (-1)^k\, y_{-k}\, C_m^k\, C_{m-k}^i\, x^{m-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^i \left( \sum_{k=0}^{m-i} (-1)^k \, C_{m-i}^k \, y_{-k} \right) x^{m-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^{m-i} \left( \nabla^{m-i} y_0 \right) x^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \left( \nabla^i y_0 \right) x^i.$$

Лемма доказана. □

По поводу вычисления конечных разностей $\Delta^i y_0$ и $\nabla^i y_0$ см. [3, с. 55-64].

Введём составную функцию

$$S(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{при } x \in [-1, 0]\,, \\ B(x) & \text{при } x \in [0, 1]\,. \end{cases}$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Функция $S(x)$ будет $r$ раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$C_m^i \, \nabla^i y_0 = C_n^i \, \Delta^i y_0 \qquad \textit{при } i = 1, \ldots, r\,. \tag{13}$$

*При $m = n$ условие* (13) *принимает вид*

$$\nabla^i y_0 = \Delta^i y_0 \qquad \textit{при } i = 1, \ldots, r\,.$$

Доказательство непосредственно следует из (10) и (12). □

Графиком $S(x)$ является кривая, сшитая из двух кривых Безье (рис. 3).

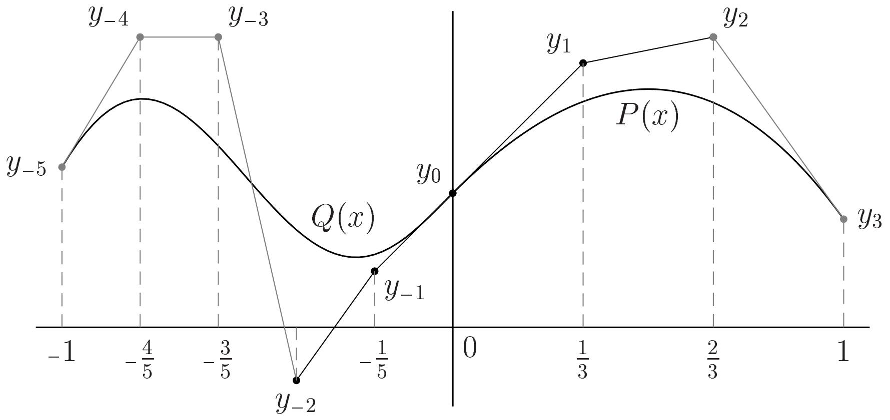


Рис. 3. Составная кривая Безье при $r = 2$

**4°**. Допустим, что построен график полинома $Q(x)$ на отрезке $[-1,0]$ по узлам $(-k/m, y_{-k})$, $k\in 0:m$. Для того, чтобы продолжить его на отрезок $[0,1]$ с сохранением гладкости до $r$-го порядка включительно, нужно обеспечить выполнение условия (13). Перепишем это условие в виде

$$\Delta^i y_0 = \left(C_m^i / C_n^i\right) \nabla^i y_0\,, \qquad i = 1, \ldots, r\,.$$

Величины $\nabla^i y_0$, $i \in 1:r$, известны. Вычислив $\Delta^i y_0$, $i \in 1:r$, найдем $y_1, \ldots, y_r$ по формуле

$$y_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \, \Delta^i y_0\,, \qquad k = 1, \ldots, r\,.$$

Набор узлов $(k/n, y_k)$, $k\in 0:r$, обеспечивает выполнение условия (13). Остальные узлы $(k/n, y_k)$, $k \in r+1:n$, — произвольны. По схеме (7) строим график $B(x)$ на $[0,1]$ как продолжение графика $Q(x)$ на $[-1,0]$.

**5°**. Представим себе такую ситуацию: график $B(x)$ на $[0,1]$ уже построен, но он нас не устраивает. Мы хотели бы увеличить степень полинома $B(x)$, чтобы усложнить поведение кривой Безье (сделать ее более гибкой). Разумеется, с сохранением гладкости составной кривой $S(x)$ на отрезке $[-1,1]$.

Основой для решения этой задачи является следующее свойство полиномов Бернштейна.

**ТЕОРЕМА 3.** *Полином* (1) *можно представить в виде*

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \widehat{y}_k \, C_{n+1}^k \, x^k \, (1-x)^{n+1-k}\,, \tag{14}$$

*где* $\widehat{y}_0 = y_0$, $\widehat{y}_{n+1} = y_n$ *и*

$$\widehat{y}_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) y_k + \frac{k}{n+1}\, y_{k-1}\,, \qquad k \in 1:n\,.$$

Доказательство. Распишем подробно правую часть формулы (14):

$$\begin{gathered} y_0\,(1-x)^{n+1} + y_n\, x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) y_k\, C_{n+1}^k\, x^k\,(1-x)^{n+1-k} + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n+1}\, y_k\, C_{n+1}^{k+1}\, x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\,. \end{gathered} \tag{15}$$

Отметим, что

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) C_{n+1}^k = C_n^k\,, \qquad \frac{k+1}{n+1}\, C_{n+1}^{k+1} = C_n^k\,.$$

Подставляя это в (15), получаем выражение

$$y_0\left[(1-x)^{n+1}+x\,(1-x)^n\right]+y_n\left[x^{n+1}+x^n(1-x)\right]+ \\ +\sum_{k=1}^{n-1} y_k\, C_n^k\left[x^k\,(1-x)^{n+1-k}+x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\right].$$

Остается учесть, что при $k\in 0:n$

$$x^k\,(1-x)^{n+1-k}+x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}=x^k\,(1-x)^{n-k}\,.$$

Теорема доказана. □

Дадим геометрическую интерпретацию теоремы 3. Обозначим через $\Gamma_n$ непрерывную ломаную с узлами $(k/n,y_k),\ k\in 0:n$. Она называется *характеристическим многоугольником* для $B(x)$. Наряду с $\Gamma_n$ рассмотрим непрерывную ломаную $\Gamma_{n+1}$ с узлами $(k/(n+1),\widehat{y}_k),\ k\in 0:n+1$. Нетрудно проверить, что узлы $(k/(n+1),\widehat{y}_k)$ лежат на $\Gamma_n$(как показано на рис. 4). Данное наблюдение дает простой способ построения $\Gamma_{n+1}$ по $\Gamma_n$ (рис. 5). Теорема 3 утверждает, что как $\Gamma_n$, так и $\Gamma_{n+1}$ являются характеристическими многоугольниками для $B(x)$.

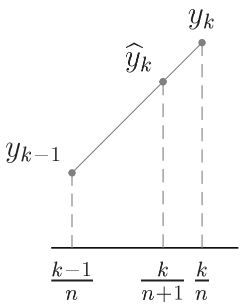


Рис. 4. Звено ломаной $\Gamma_n$

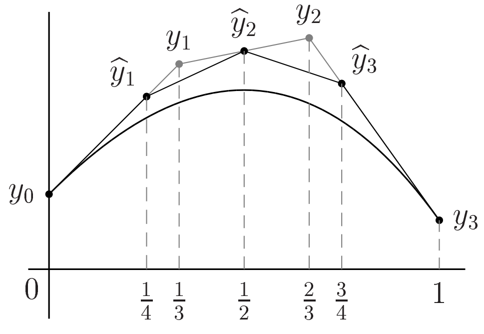


Рис. 5. Переход от ломаной $\Gamma_3$ к $\Gamma_4$

Если составная кривая $S(x)$ была $r$ раз непрерывно дифференцируемой, то по теореме 2 выполняется условие

$$C_m^i\,\nabla^i y_0=C_{n+1}^i\,\Delta^i\widehat{y}_0\,,\qquad i\in 1:r\,.$$

Закрепим узлы $(k/(n+1),\widehat{y}_k),\ k\in 0:r$. Остальными узлами $(k/(n+1),\widehat{y}_k)$, $k\in r+1:n+1$, при построении составной кривой Безье можно управлять. Очевидно, что количество степеней свободы у составной кривой Безье увеличилось на единицу.

От ломаной $\Gamma_{n+1}$ можно перейти к ломаной $\Gamma_{n+2}$ и т.д., приобретая каждый раз лишнюю степень свободы.

**6**°. Построение составной кривой Безье в пространстве $\mathbb{R}^s$ производится по аналогичной схеме. В частности, выполнение векторного условия

$$C_m^i\,\nabla^i Y_0 = C_n^i\,\Delta^i Y_0 \qquad \text{при } i = 1,\ldots,r$$

гарантирует непрерывную дифференцируемость составной кривой Безье до $r$-го порядка включительно.

**7**°. Обратимся к вопросу о вычислении производной полинома Бернштейна (1).

**ЛЕММА 4.** *При $n \geq 2$ справедлива формула*

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{(1)}\, p_{n-1,k}(x)\,, \tag{16}$$

*где $u_k^{(1)} = n\,(y_{k+1} - y_k)$.*

Доказательство. Имеем

$$p'_{n0}(x) = -n\,p_{n-1,0}(x)\,, \qquad p'_{nn}(x) = n\,p_{n-1,n-1}(x)\,. \tag{17}$$

Далее при $k \in 1 : n-1$

$$p'_{nk}(x) = k\,C_n^k\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} - (n-k)\,C_n^{n-k}\,x^k\,(1-x)^{n-1-k}\,.$$

Поскольку $k\,C_n^k = n\,C_{n-1}^{k-1}$, $(n-k)\,C_n^{n-k} = n\,C_{n-1}^k$, то

$$p'_{nk}(x) = n\,\bigl(p_{n-1,k-1}(x) - p_{n-1,k}(x)\bigr)\,. \tag{18}$$

На основании (17), (18) получаем

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\,p'_{nk}(x) = y_0\,p'_{n0}(x) + y_n\,p'_{nn}(x) +$$

$$+n\sum_{k=1}^{n-1} y_k\,\bigl(p_{n-1,k-1}(x) - p_{n-1,k}(x)\bigr) = n\sum_{k=1}^{n} y_k\,p_{n-1,k-1}(x) -$$

$$-n\sum_{k=0}^{n-1} y_k\,p_{n-1,k}(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)\,p_{n-1,k}(x)\,,$$

что равносильно (16). □

Из (16), в частности, следует, что

$$B'(0) = n\,(y_1 - y_0)\,, \qquad B'(1) = n\,(y_n - y_{n-1})\,.$$

Это значит, что график полинома $B(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$ касается характеристического многоугольника (см. рис. 1).

**ТЕОРЕМА 4.** *При $n \geq 2$ и $x \in (0,1)$ справедливо равенство*

$$B'(x) = n\left(y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right),$$

*где $y_0^{(n-1)}$ и $y_1^{(n-1)}$ вычисляются по схеме* (7).

Доказательство. Формулу (16) сопоставим с (6). Правую часть (16) можно преобразовать так же, как правую часть (6). В результате получим

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{n-2} u_k^{(2)}\,p_{n-2,k}(x)\,,$$

где

$$\begin{aligned} u_k^{(2)} = (1-x)\,u_k^{(1)} + x\,u_{k+1}^{(1)} = (1-x)\left[n\left(y_{k+1}^{(0)} - y_k^{(0)}\right)\right] + \\ + x\left[n\left(y_{k+2}^{(0)} - y_{k+1}^{(0)}\right)\right] = n\left[(1-x)\,y_{k+1}^{(0)} + x\,y_{k+2}^{(0)}\right] - \\ - n\left[(1-x)\,y_k^{(0)} + x\,y_{k+1}^{(0)}\right] = n\left(y_{k+1}^{(1)} - y_k^{(1)}\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{n-3} u_k^{(3)}\,p_{n-3,k}(x)\,,$$

где $u_k^{(3)} = n\left(y_{k+1}^{(2)} - y_k^{(2)}\right)$, и т. д. Наконец,

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{k=0}^{1} u_k^{(n-1)}\,p_{1k}(x) = (1-x)\,u_0^{(n-1)} + x\,u_1^{(n-1)} = \\ &= (1-x)\left[n\left(y_1^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}\right)\right] + x\left[n\left(y_2^{(n-2)} - y_1^{(n-2)}\right)\right] = \\ &= n\left(y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 4 показывает, что можно одновременно вычислить значения $B(x)$ и $B'(x)$ в точке $x \in (0,1)$. Для этого по схеме (7) нужно найти $y_0^{(n-1)}$ и $y_1^{(n-1)}$, после чего положить

$$B(x) = (1-x)\, y_0^{(n-1)} + x\, y_1^{(n-1)}\,, \qquad B'(x) = n\left(y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right). \tag{19}$$

Дадим геометрическую интерпретацию равенств (19). Вернемся к векторной схеме (9) при $Y_k = (k/n, y_k),\ k \in 0 : n$. Как отмечалось в п. 2°, точки $Y_0^{(n-1)}$ и $Y_1^{(n-1)}$ имеют координаты $\left(\frac{(n-1)\,x}{n}, y_0^{(n-1)}\right)$ и $\left(\frac{(n-1)\,x+1}{n}, y_1^{(n-1)}\right)$ соответственно. Равенства (19) гарантируют, что в точке $x$ график полинома Бернштейна касается отрезка, соединяющего точки $Y_0^{(n-1)}$ и $Y_1^{(n-1)}$ (см. рис. 1).

**8**°. Дополнительная информация о полиномах Бернштейна и кривых Безье имеется на сайте [4].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Виденский В. С. *Многочлены Бернштейна.* Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

2. Безье П. *Геометрические методы.* В кн.: Математика и САПР. 2. М.: Мир, 1989. С. 96–257.

3. Мысовских И. П. *Лекции по численным методам.* Изд. второе. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.

4. *On-Line Geometric Modeling Notes.* http://graphics.cs.ucdavis.edu/CAGDNotes/.