БИКУБИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА*

В. Н. Малозёмов — malv@math.spbu.ru
Н. В. Чашников — nik239@list.ru

23 января 2007 г.

1°. Пусть заданы непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции

$$f_1(v),\ f_2(v),\ f_3(v),\ f_4(v),$$
$$g_1(u),\ g_2(u),\ g_3(u),\ g_4(u).$$

Обозначим $D = [0,1]^2$. Ставится задача: *построить возможно более простую функцию $a : D \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую граничным условиям*

$$\begin{aligned} &a(0,v) \equiv f_1(v), \quad a_u(0,v) \equiv f_2(v), \quad a_u(1,v) \equiv f_3(v), \quad a(1,v) \equiv f_4(v),\\ &a(u,0) \equiv g_1(u), \quad a_v(u,0) \equiv g_2(u), \quad a_v(u,1) \equiv g_3(u), \quad a(u,1) \equiv g_4(u). \end{aligned} \tag{1}$$

Введём на $C^1[0,1]$ линейные (однородные и аддитивные) функционалы

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

Функционалы L_i можно применять и к непрерывно дифференцируемым функциям двух переменных, заданным на D, если фиксировать один из аргументов. Пусть $a \in C^1(D)$. Тогда $a(\cdot, v)$ есть функция первого аргумента при фиксированном втором, $a(u,\cdot)$ — функция второго аргумента при фиксированном первом и

$$\begin{aligned} L_1\big(a(\cdot,v)\big) &= a(0,v), & L_1\big(a(u,\cdot)\big) &= a(u,0),\\ L_2\big(a(\cdot,v)\big) &= a_u(0,v), & L_2\big(a(u,\cdot)\big) &= a_v(u,0),\\ L_3\big(a(\cdot,v)\big) &= a_u(1,v), & L_3\big(a(u,\cdot)\big) &= a_v(u,1),\\ L_4\big(a(\cdot,v)\big) &= a(1,v), & L_4\big(a(u,\cdot)\big) &= a(u,1). \end{aligned}$$

С использованием функционалов L_i граничные условия (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L_i(a(\cdot,v)) &= f_i(v), \qquad v \in [0,1], \quad i \in 1:4\,;\\ L_j(a(u,\cdot)) &= g_j(u), \qquad u \in [0,1], \quad j \in 1:4\,. \end{aligned} \tag{2}$$

*Санкт-Петербургский городской семинар «Всплески (wavelets) и их приложения». Секция «Дискретный гармонический анализ»: http://www.math.spbu.ru/user/dmp/dha/

2°. Граничные функции f_i, g_j должны удовлетворять естественным условиям согласования в вершинах квадрата D:

$$\begin{aligned}
&f_1(0) = g_1(0), \quad f_1(1) = g_4(0), \quad f_4(1) = g_4(1), \quad f_4(0) = g_1(1),\\
&f_1'(0) = g_2(0), \quad f_1'(1) = g_3(0), \quad f_4'(1) = g_3(1), \quad f_4'(0) = g_2(1),\\
&f_2(0) = g_1'(0), \quad f_2(1) = g_4'(0), \quad f_3(1) = g_4'(1), \quad f_3(0) = g_1'(1).
\end{aligned}$$

Функция $a \in C^1(D)$, которую мы построим, будет иметь непрерывные на D смешанные производные a_{uv} и a_{vu}, которые, как известно, должны быть равны между собой [1, с. 456]. В частности, $a_{uv} = a_{vu}$ в вершинах квадрата D. Это приводит к дополнительным условиям согласования

$$f_2'(0) = g_2'(0), \quad f_2'(1) = g_3'(0), \quad f_3'(1) = g_3'(1), \quad f_3'(0) = g_2'(1).$$

Замечательно, что все 16 условий согласования можно записать единообразно:

$$L_i(f_j) = L_j(g_i), \qquad i, j \in 1:4\,. \tag{3}$$

Формула (3) допускает матричное представление

$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0)\\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) & f_4'(0)\\ f_1'(1) & f_2'(1) & f_3'(1) & f_4'(1)\\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) & f_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(0) & g_1'(0) & g_1'(1) & g_1(1)\\ g_2(0) & g_2'(0) & g_2'(1) & g_2(1)\\ g_3(0) & g_3'(0) & g_3'(1) & g_3(1)\\ g_4(0) & g_4'(0) & g_4'(1) & g_4(1) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

3°. Введём кубические полиномы Эрмита H_1, H_2, H_3, H_4, исходя из интерполяционных условий

$$\begin{aligned}
&H_1(0) = 1, \quad H_1'(0) = 0, \quad H_1'(1) = 0, \quad H_1(1) = 0;\\
&H_2(0) = 0, \quad H_2'(0) = 1, \quad H_2'(1) = 0, \quad H_2(1) = 0;\\
&H_3(0) = 0, \quad H_3'(0) = 0, \quad H_3'(1) = 1, \quad H_3(1) = 0;\\
&H_4(0) = 0, \quad H_4'(0) = 0, \quad H_4'(1) = 0, \quad H_4(1) = 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1,\\
H_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x,\\
H_3(x) &= x^3 - x^2,\\
H_4(x) &= -2x^3 + 3x^2.
\end{aligned}$$

Графики этих полиномов представлены на рис. 1.

Отметим, что условия (5) можно записать в компактном виде

$$L_i(H_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1:4, \tag{6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

В качестве H_j могут быть взяты любые другие непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (6).

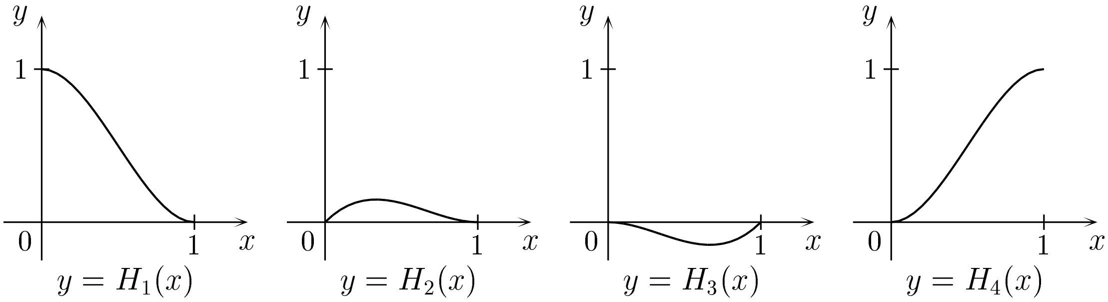

Рис. 1. Графики кубических полиномов Эрмита.

4°. Положим

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{4} f_i(v)H_i(u) + \sum_{j=1}^{4} g_j(u)H_j(v) - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} L_i(g_j)H_i(u)H_j(v). \qquad (7)$$

Очевидно, что $a \in C^1(D)$ и существуют непрерывные на D смешанные производные a_{uv} и a_{vu}.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При выполнении условий согласования* (3) *функция* $a(u,v)$ *вида* (7) *удовлетворяет граничным условиям* (2).

Доказательство. Согласно линейности функционалов L_k и формуле (6) при $k \in 1:4$ имеем

$$L_k\big(a(\cdot,v)\big) = \sum_{i=1}^{4} f_i(v)L_k(H_i) + \sum_{j=1}^{4} L_k(g_j)H_j(v) -$$
$$- \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} L_i(g_j)H_j(v)L_k(H_i) = f_k(v).$$

Аналогично с учётом (3) получаем

$$L_k\big(a(u,\cdot)\big) = \sum_{i=1}^{4} L_k(f_i)H_i(u) + \sum_{j=1}^{4} g_j(u)L_k(H_j) -$$
$$- \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} L_j(f_i)H_i(u)L_k(H_j) = g_k(u).$$

Предложение доказано. □

График функции $a(u,v)$ вида (7) на множестве D называется *бикубической поверхностью Кунса.*

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f_1(v) \equiv 0, \quad f_4(v) \equiv 0, \quad g_1(u) \equiv 0, \quad g_4(u) \equiv 0.$$

Функции $f_2(v)$ и $f_3(v)$ будут многочленами, кратными $v(1-v)$, а функции $g_2(u)$ и $g_3(u)$ — многочленами, кратными $u(1-u)$. В этом случае 12 из 16 условий согласования (4), в которых участвуют внешние строки и столбцы матрицы, будут выполнены. Остаётся обеспечить равенства

$$f_2'(0) = g_2'(0), \quad f_2'(1) = g_3'(0), \quad f_3'(0) = g_2'(1), \quad f_3'(1) = g_3'(1). \tag{8}$$

Положим

$$\begin{aligned} f_2(v) &= a\,v(1-v), \quad & f_3(v) &= b\,v(1-v)(5v-1), \\ g_2(u) &= c\,u(1-u), \quad & g_3(u) &= d\,u(1-u)(5u-1). \end{aligned}$$

Условия (8) выполняются, если $a = b = c = d$. Возьмём в качестве общего значения этих коэффициентов число 10.

Теперь корректно определены все граничные функции. Соответствующая бикубическая поверхность Кунса представлена на рис. 2.

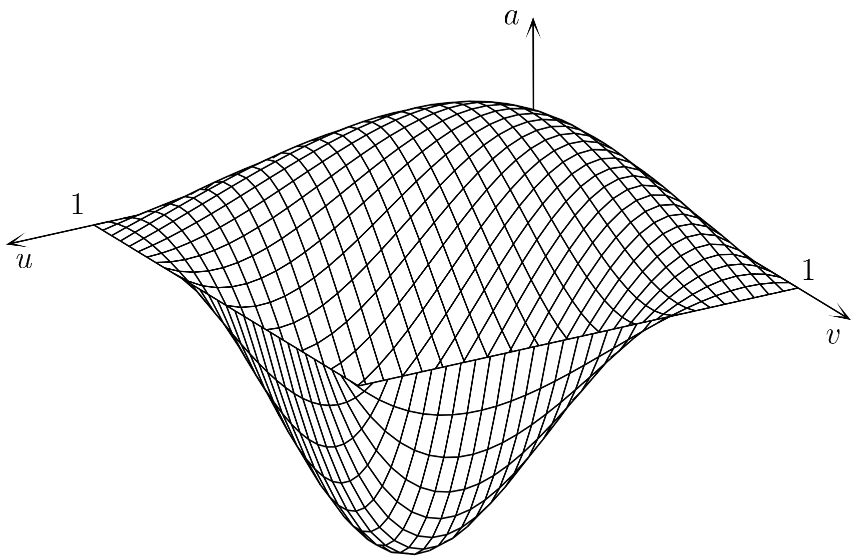

Рис. 2. Бикубическая поверхность Кунса.

5°. Перейдём к случаю, когда f_i и g_j в формуле (7) суть трёхмерные вектор-функции, заданные на отрезке $[0,1]$, т. е.

$$f_i(v) = \big(f_{i1}(v),\, f_{i2}(v),\, f_{i3}(v)\big), \;\; g_j(u) = \big(g_{j1}(u),\, g_{j2}(u),\, g_{j3}(u)\big), \quad i,j \in 1:4\,.$$

При этом $L_k(f_i) = \bigl(L_k(f_{i1}),\, L_k(f_{i2}),\, L_k(f_{i3})\bigr)$. Аналогично определяется $L_k(g_j)$. Поскольку

$$f_i(v)H_j(u) = \bigl(f_{i1}(v)H_j(u),\, f_{i2}(v)H_j(u),\, f_{i3}(v)H_j(u)\bigr),$$

то

$$L_k\bigl(f_i(v)H_j(\,\cdot)\bigr) = \bigl(f_{i1}(v)\, L_k(H_j),\, f_{i2}(v)\, L_k(H_j),\, f_{i3}(v)\, L_k(H_j)\bigr) = f_i(v)\,\delta_{kj}\,.$$

Пусть вектор-функции f_i и g_j непрерывно дифференцируемы на $[0,1]$ и выполнены условия согласования

$$L_i(f_j) = L_j(g_i), \qquad i,j \in 1:4\,.$$

Тогда отображение $a : D \to \mathbb{R}^3$ вида (7) определяет *параметрическую поверхность Кунса*, удовлетворяющую граничным условиям (2).

ПРИМЕР 2. Возьмём в качестве H_j следующие функции:

$$H_1(x) = \cos^2\frac{\pi x}{2}\,, \qquad H_2(x) = \frac{2}{\pi}\Bigl(\sin\frac{\pi x}{2} - \sin^2\frac{\pi x}{2}\Bigr)\,,$$
$$H_3(x) = -\frac{2}{\pi}\Bigl(\cos\frac{\pi x}{2} - \cos^2\frac{\pi x}{2}\Bigr)\,, \quad H_4(x) = \sin^2\frac{\pi x}{2}\,.$$

Нетрудно проверить, что для таких H_j выполнены условия (6).

Построим с помощью параметрической поверхности Кунса поверхность тора. Она будет состоять из четырёх порций. Определим граничные вектор-функции для основной порции. Положим

$$f_1(v) = (2+\cos\pi v,\, 0,\, \sin\pi v), \quad f_4(v) = (-2-\cos\pi v,\, 0,\, \sin\pi v),$$
$$g_1(u) = (3\cos\pi u,\, 3\sin\pi u,\, 0), \quad g_4(u) = (\cos\pi u,\, \sin\pi u,\, 0).$$

Функции $f_1(v)$ и $f_4(v)$ задают полуокружности радиуса 1, лежащие в плоскости XZ, с центрами $(2,0,0)$ и $(-2,0,0)$ соответственно. Функции $g_1(u)$ и $g_4(u)$ задают полуокружности с центром в начале координат и радиусами 3 и 1 соответственно, лежащие в плоскости XY (рис. 3).

Функции $g_2(u)$ и $g_3(u)$ определяют значения производной по v в точках поверхности с $v=0$ и $v=1$, т. е. на кривых, задаваемых функциями $g_1(u)$ и $g_4(u)$. Для построения поверхности тора необходимо, чтобы векторы $g_2(u)$ и $g_3(u)$ были параллельны оси OZ. Кроме того, для выполнения условий согласования требуется, чтобы

$$g_2(0) = f_1'(0) = (0,\, 0,\, \pi), \qquad g_2(1) = f_4'(0) = (0,\, 0,\, \pi),$$
$$g_3(0) = f_1'(1) = (0,\, 0,\, -\pi), \quad g_3(1) = f_4'(1) = (0,\, 0,\, -\pi).$$

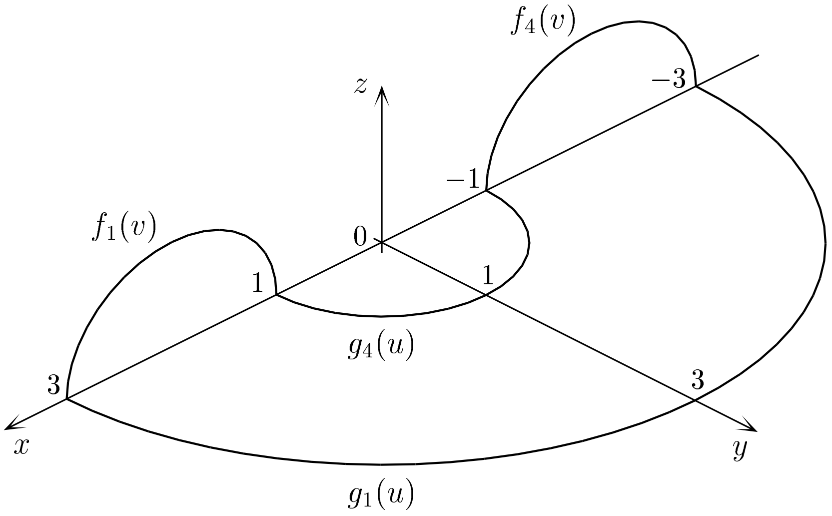

Рис. 3. Граничные функции.

Положим

$$g_2(u) = (0,\, 0,\, \pi), \quad g_3(u) = (0,\, 0,\, -\pi).$$

Аналогично функции $f_2(v)$ и $f_3(v)$ задают производные по u в точках поверхности, лежащих на кривых $f_1(v)$ и $f_4(v)$, поэтому для построения поверхности тора необходимо, чтобы векторы $f_2(v)$ и $f_3(v)$ были параллельны оси OY. Кроме того, для выполнения условий согласования требуется, чтобы

$$\begin{aligned} f_2(0) &= g_1'(0) = (0,\, 3\pi,\, 0), & f_2'(0) &= g_2'(0) = (0,\, 0,\, 0), \\ f_2'(1) &= g_3'(0) = (0,\, 0,\, 0), & f_2(1) &= g_4'(0) = (0,\, \pi,\, 0). \end{aligned}$$

Можно положить, например, $f_2(v) = (0,\, \pi\,(2 + \cos \pi v),\, 0)$. По аналогичным соображениям полагаем $f_3(v) = (0,\, -\pi\,(2 + \cos \pi v),\, 0)$.

Итак, граничные вектор-функции выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(v) &= (2 + \cos \pi v,\, 0,\, \sin \pi v), & f_2(v) &= (0,\, \pi\,(2 + \cos \pi v),\, 0), \\ f_3(v) &= (0,\, -\pi\,(2 + \cos \pi v),\, 0), & f_4(v) &= (-2 - \cos \pi v,\, 0,\, \sin \pi v), \\ g_1(u) &= (3 \cos \pi u,\, 3 \sin \pi u,\, 0), & g_2(u) &= (0,\, 0,\, \pi), \\ g_3(u) &= (0,\, 0,\, -\pi), & g_4(u) &= (\cos \pi u,\, \sin \pi u,\, 0). \end{aligned} \tag{9}$$

Все 16 условий согласования выполнены. По формуле (7) для граничных функций (9) получим вектор-функцию $a(u,v) = \big(a_1(u,v),\, a_2(u,v),\, a_3(u,v)\big)$. Параметрическая поверхность Кунса, определяемая этой вектор-функцией, изображена на рис. 4.

Докажем, что вектор-функция $a(u,v)$ при $u, v \in [0,1]$ действительно описывает четверть поверхности тора.

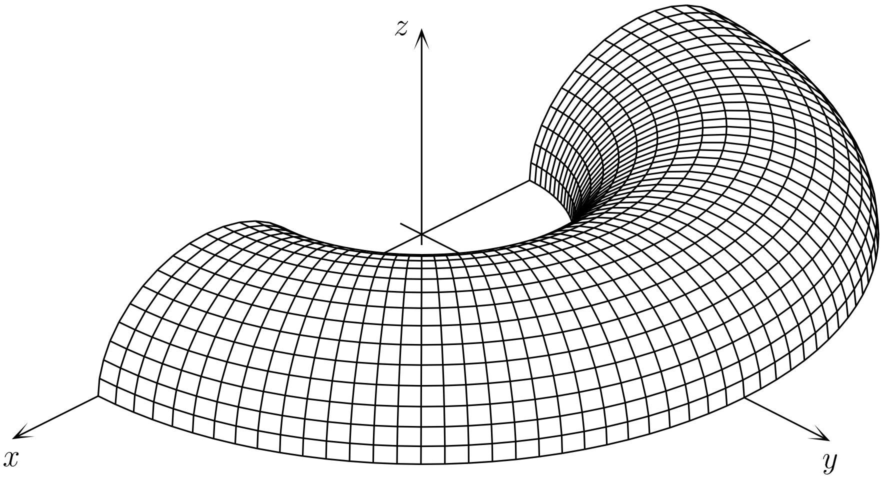

Рис. 4. Параметрическая поверхность Кунса.

Значения $L_i(g_j)$, используемые в формуле (7), образуют матрицу

$$\begin{bmatrix} g_1(0) & g_1'(0) & g_1'(1) & g_1(1) \\ g_2(0) & g_2'(0) & g_2'(1) & g_2(1) \\ g_3(0) & g_3'(0) & g_3'(1) & g_3(1) \\ g_4(0) & g_4'(0) & g_4'(1) & g_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3,0,0) & (0,3\pi,0) & (0,-3\pi,0) & (-3,0,0) \\ (0,0,\pi) & (0,0,0) & (0,0,0) & (0,0,\pi) \\ (0,0,-\pi) & (0,0,0) & (0,0,0) & (0,0,-\pi) \\ (1,0,0) & (0,\pi,0) & (0,-\pi,0) & (-1,0,0) \end{bmatrix}$$

(индекс j обозначает номер строки, а индекс i — номер столбца). Базисные функции H_1 и H_4 удовлетворяют соотношениям

$$H_1(u) - H_4(u) = \cos\pi u\,, \quad 3H_1(v) + H_4(v) = 2 + \cos\pi v\,, \quad H_1(u) + H_4(u) \equiv 1\,.$$

Приняв эти факты во внимание, запишем

$$\begin{aligned} a_1(u,v) &= (2+\cos\pi v)\big(H_1(u) - H_4(u)\big) + \cos\pi u\,\big(3H_1(v) + H_4(v)\big) - \\ &\quad - 3\big(H_1(u) - H_4(u)\big)H_1(v) - \big(H_1(u) - H_4(u)\big)H_4(v) = \\ &= \cos\pi u\,(2+\cos\pi v) + \big(H_1(u) - H_4(u)\big) \times \\ &\quad \times \big[2 + \cos\pi v - \big(3H_1(v) + H_4(v)\big)\big] = \cos\pi u\,(2+\cos\pi v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(u,v) &= \pi\,(2+\cos\pi v)\big(H_2(u) - H_3(u)\big) + \sin\pi u\,\big(3H_1(v) + H_4(v)\big) - \\ &\quad - 3\pi\,\big(H_2(u) - H_3(u)\big)H_1(v) - \pi\,\big(H_2(u) - H_3(u)\big)H_4(v) = \\ &= \sin\pi u\,(2+\cos\pi v) + \pi\,\big(H_2(u) - H_3(u)\big) \times \\ &\quad \times \big[2 + \cos\pi v - \big(3H_1(v) + H_4(v)\big)\big] = \sin\pi u\,(2+\cos\pi v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(u,v) &= \sin\pi v\,\big(H_1(u) + H_4(u)\big) + \pi\,\big(H_2(v) - H_3(v)\big) - \\ &\quad - \pi\,\big(H_1(u) + H_4(u)\big)H_2(v) + \pi\,\big(H_1(u) + H_4(u)\big)H_3(v) = \\ &= \sin\pi v + \pi\,\big(H_2(v) - H_3(v)\big)\big[1 - \big(H_1(v) + H_4(v)\big)\big] = \sin\pi v\,. \end{aligned}$$

Значит,

$$a(u,v) = \big((2+\cos\pi v)\cos\pi u,\ (2+\cos\pi v)\sin\pi u,\ \sin\pi v\big).$$

Отсюда видно, что точка $a(u,v)$ получается из точки

$$(2+\cos\pi v,\ 0,\ \sin\pi v) = f_1(v)$$

поворотом на угол πu вокруг оси OZ. Как следствие, поверхность, задаваемая вектор-функцией $a(u,v)$, получается вращением вокруг оси OZ полуокружности, определяемой вектор-функцией $f_1(v)$. Эта поверхность является четвертью поверхности тора (см. рис. 4). На рис. 5 из четырёх таких порций составлена полная поверхность тора.

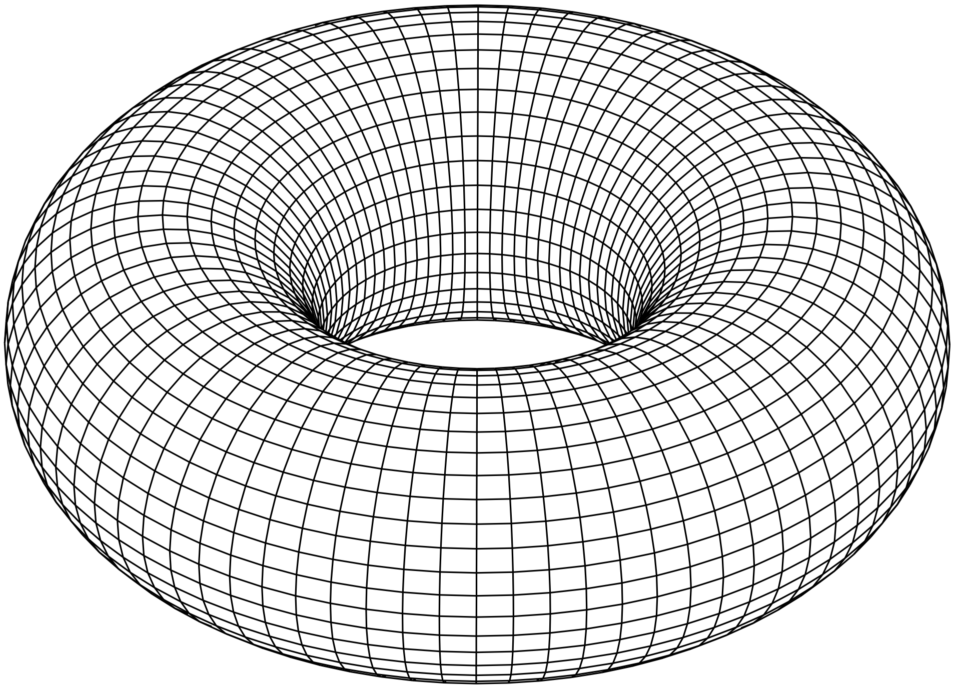

Рис. 5. Поверхность тора.

6°. Дальнейшую информацию о поверхностях Кунса можно найти в книге [2] и приведённом там списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2006.

2. G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD.* 5th ed. Academic Press, 2002.