Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами

В.А. Желудев*, А.Б. Певный**

*School of Math. Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978, Israel
**167001 Сыктывкар, Сыктывкарский госуниверситет, математич. фак-т

Аннотация

Предлагаюся прямая и двойственная лифтинговые схемы для вейвлетного разложения дискретных сигналов.

1 Введение

Конструкция биортогональных вейвлетов в данной статье основана на интерполяции дискретными периодическими сплайнами [4]. Для данного сигнала $z(k)$, $k \in \in 0 : N-1$, где $N = 2^t$, рассмотрим четный и нечетный подмассивы массива z:

$$e(k) = z(2k),\ k \in 0 : m-1; \quad d(k) = z(2k+1),\ k \in 0 : m-1;\ m = N/2.$$

При построении вейвлетных схем будем использовать четный массив, чтобы предсказать значения нечетного, на основе интерполяции дискретными N-периодическими сплайнами. В итоге получаем быстрое вейвлетное преобразование сигнала. Это преобразование можно записать с использованием фильтров высоких и низких частот [5]. В данной работе преобразование выполняется в "лифтинговой"форме [7], что допускает эффективную компьютерную реализацию. Как и в других лифтинговых схемах, вычисления выполняются "на месте"(в одном массиве) , а обратное преобразование заключается в выполнении действий в обратном порядке. Отличие от других лифтинговых схем состоит в том, что вычисления ведутся в частотной области с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Наличие управляющей функции $\beta_\nu(j)$ делает схему весьма гибкой, позволяет получать вейвлетные биортогональные базисы с разными свойствами, в частности можно добиться того, что базисные функции, принадлежащие разным уровням, станут ортогональными (см. лемму 5).

Наша схема идейно близка к схеме, реализованной в [1], где были использованы непрерывные интерполяционные сплайны. Метод предсказания нечетных элементов массива с помощью интерполяции на четных элементах был предложен в работе Донохоу[2], которая была модифицирована Свелденсом [3],[7] в "лифтинговую схему".

2 Дискретные N-периодические сплайны

Дискретные N-периодические сплайны подробно исследованы в [4]. Они определяются тройкой натуральных чисел (r, m, n), где $mn = N$. На каждом промежутке между узлами $0, n, 2n, \ldots, mn = N$ сплайн $S_r(j)$ (j—целое число) совпадает с некоторым полиномом степени $2r-1$. Выберем $n = 2$, $m = N/2$ и рассмотрим интерполяционную задачу

$$S_r(2k) = e(k), \;\; k \in 0 : m-1. \tag{1}$$

Эта задача легко решается. Всякий сплайн S_r (при $n = 2$) представляется в виде

$$S_r(j) = \sum_{l=0}^{m-1} c(l) Q_r(j-2l), \quad m = \frac{N}{2},$$

где Q_r—B-сплайн (см. [4]). При указанных значениях n, m ДПФ от B-сплайна дается простой формулой (см. [4])

$$\mathcal{F}_N(Q_r)(j) := \sum_{k=0}^{N-1} Q_r(k)\omega_N^{-kj} = \Big(\frac{\sin \pi j/m}{\sin \pi j/N}\Big)^{2r} = \left(2\cos\frac{j\pi}{N}\right)^{2r},$$

где $\omega_N = e^{2\pi i/N}$. Задача (1) переписывается в виде

$$\sum_{l=0}^{m-1} c(l) Q_r(2k-2l) = e(k), \quad k \in 0 : m-1.$$

ДПФ векторов c, e обозначим C, E: $C = \mathcal{F}_m(c)$, $E = \mathcal{F}_m(e)$. По теореме о свертке $C(j)T_r(j) = E(j)$, $j \in 0 : m-1$, где

$$\begin{aligned} T_r(j) := \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} Q_r(2k)\omega_m^{-kj} &= \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}_N(Q_r)(j) + \mathcal{F}_N(Q_r)(j+m)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(2\cos\tfrac{j\pi}{N}\right)^{2r} + \left(2\sin\tfrac{j\pi}{N}\right)^{2r}\right]. \end{aligned}$$

Найдем теперь значения $\sigma(k) = S_r(2k+1)$, $k \in 0 : m-1$, в нечетных точках $2k+1$. Имеем $\sigma = c * \mu$, где $\mu(k) = Q_r(2k+1)$, $k \in 0 : m-1$, причем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(\mu)(j) &= \tfrac{1}{2}\omega_N^j\left[\mathcal{F}_N(Q_r)(j) - \mathcal{F}_N(Q_r)(j+m)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\omega_N^j\left[\left(2\cos\tfrac{j\pi}{N}\right)^{2r} - \left(2\sin\tfrac{j\pi}{N}\right)^{2r}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_m(\sigma)(j) = C(j)\mathcal{F}_m(\mu)(j) = \frac{E(j)}{T_r(j)}\mathcal{F}_m(\mu)(j) = E(j)\omega_N^j U_1(j), \tag{2}$$

где

$$U_1(j) = \frac{\left(\cos\frac{j\pi}{N}\right)^{2r} - \left(\sin\frac{j\pi}{N}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{j\pi}{N}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{j\pi}{N}\right)^{2r}}. \tag{3}$$

Отметим, что $U_1(j+m) = -U_1(j)$ и $U_1(j)$ имеет период $N = 2m$. Формулы (2) и (3) будут играть в дальнейшем существенную роль.

3 Лифтинговая схема

3.1 Прямая лифтинговая схема

Каждый шаг схемы состоит из трех этапов, за которыми сохраним английские названия.

Split. Расщепим сигнал z на два массива

$$e_1(k) = z(2k),\ k \in 0 : m-1; \quad d_1(k) = z(2k+1),\ k \in 0 : m-1;\ m = N/2.$$

Predict. Предскажем значения нечетного массива с помощью интерполяции дискретным N-периодическим сплайном (см. разд. 2). Положим $\widetilde{d}_1 = d_1 - \sigma$, где $\sigma(k) = S_r(2k+1)$— значения интерполяционного сплайна S_r в нечетных точках. Удобное выражение для $\widetilde{d}$ получится, если сделать ДПФ.

ДПФ от $\widetilde{d}_1$ и d_1 обозначим $\widetilde{D}_1$ и D_1 соответственно. По формуле (2) получим

$$\widetilde{D}_1(j) = D_1(j) - E_1(j)\omega_N^j U_1(j),\ j \in 0 : m-1, \tag{4}$$

где функция $U_1(j)$ определена формулой (3).

Lifting. Обновим массив e_1, т.е. построим $\widetilde{e}_1$ по формуле

$$\widetilde{E}_1(j) = E_1(j) + \beta_1(j)\omega_N^{-j}\widetilde{D}_1(j), \tag{5}$$

где $\beta_1(j)$—вещественная N-периодическая функция со свойством $\beta_1(j+m) = -\beta_1(j)$ (в дальнейшем конкретизируем выбор β_1). Поскольку $\omega_N^{-(j+m)} = -\omega_N^{-j}$, то правая часть (5) имеет период m.

Выразим $\widetilde{D}_1$ и $\widetilde{E}_1$ через $Z = \mathfrak{F}_N(z)$. Поскольку $N = 2m$, то справедливы легко проверяемые формулы

$$E_1(j) = \frac{1}{2}[Z(j) + Z(j+m)], \quad D_1(j) = \frac{1}{2}\omega_N^j[Z(j) - Z(j+m)]. \tag{6}$$

Подставим эти выражения в (4) и (5). Получим

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_1(j) &= \tfrac{1}{2}[\omega_N^j(1 - U_1(j))Z(j) - \omega_N^j(1 + U_1(j))Z(j+m)] = \\ &= \tfrac{1}{2}[\overline{\widetilde{g}_1(j)}Z(j) + \overline{\widetilde{g}_1(j+m)}Z(j+m)],\ j \in 0 : m-1, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\widetilde{g}_1(j) = \omega_N^{-j}(1 - U_1(j)). \tag{8}$$

Учли, что $U_1(j+m) = -U_1(j)$. Аналогично, из (5) получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1(j) &= \tfrac{1}{2}\big[(1 + \beta_1(j)(1 - U_1(j)))Z(j) + (1 - \beta_1(j)(1 + U_1(j))Z(j+m)\big] = \\ &= \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{h}_1(j)Z(j) + \widetilde{h}_1(j+m)Z(j+m)\big],\ j \in 0 : m-1, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\widetilde{h}_1(j) = 1 + \beta_1(j)(1 - U_1(j)). \tag{10}$$

Учли, что $\beta_1(j+m) = -\beta_1(j)$. Формулы (7) и (9) назовем формулами декомпозиции в фильтровой форме [5].

Получим формулы реконструкции, выражающие $Z(j)$ через $\widetilde{D}_1$ и $\widetilde{E}_1$. Из (5) и (4) следует, что

$$E_1(j) = \widetilde{E}_1(j) - \beta_1(j)\omega_N^{-j}\widetilde{D}_1(j),$$

$$D_1(j) = \widetilde{D}_1(j) + E_1(j)\omega_N^{j}U_1(j) = (1-\beta_1(j)U_1(j))\widetilde{D}_1(j) + \omega_N^{j}U_1(j)\widetilde{E}_1(j).$$

А из (6) получаем

$$Z(j) = E_1(j) + D_1(j)\omega_N^{-j} = h_1(j)\widetilde{E}_1(j) + g_1(j)\widetilde{D}_1(j),\ j \in 0:N-1, \qquad (11)$$

где

$$h_1(j) = 1 + U_1(j), \quad g_1(j) = \omega_N^{-j}(1-\beta_1(j)(1+U_1(j)).$$

На рис.1 приведены графики функций h_1 и $\widetilde{h}_1$ при $r=3$ и $\beta_1(j) = U_1(j)/(1+U_1^2(j))$, а на рис.2 приведены графики функций $|g_1|$ и $|\widetilde{g}_1|$ при тех же r,β_1.

3.2 Двойственная лифтинговая схема

В прямой схеме обновленный вектор $\widetilde{E}_1$ содержит управляющую функцию $\beta_1(j)$. Опишем двойственную схему, в которой управляющая функция $\alpha_1(j)$ будет содержаться в обновленном векторе $\widetilde{D}_1$.

Декомпозиция. Сначала разложим сигнал z на четный и нечетный подмассивы: $e_1(k) = z(2k),\ k \in 0:m-1;\quad d_1(k) = z(2k+1),\ k \in 0:m-1;\ m = N/2$. Используем теперь нечетный массив, чтобы предсказать значения четного. Предсказанные значения четного массива $\sigma(k)$ будут определяться из формулы: $\mathcal{F}_m(\sigma)(j) = D_1(j)\omega_N^{-j}U_1(j)$, а обновленный массив $\widetilde{e}_1$ будет будет полусуммой e_1 и σ, что в частотной области принимает вид:

$$\widetilde{E}_1(j) = \frac{1}{2}[E_1(j) + \omega_N^{-j}U_1(j)D_1(j)],\ j \in 0:m-1, \qquad (12)$$

Далее обновим D_1, а именно построим $\widetilde{D}_1$ по формуле

$$\widetilde{D}_1(j) = D_1(j) - 2\alpha_1(j)\omega_N^{j}\widetilde{E}_1(j),\ j \in 0:m-1, \qquad (13)$$

где $\alpha_1(j)$—вещественная N-периодическая функция со свойством $\alpha_1(j+m) = -\alpha_1(j)$.

Реконструкция. Восстановим нечетный массив

$$D_1(j) = \widetilde{D}_1(j) + 2\alpha_1(j)\omega_N^{j}\widetilde{E}_1(j),\ j \in 0:m-1,$$

а далее реконструируем четный:

$$E_1(j) = 2\widetilde{E}_1(j) - \omega_N^{-j}U_1(j)D_1(j),\ j \in 0:m-1.$$

Обратным ДПФ находим e_1, d_1, т.е. исходный сигнал z.

Запишем формулы декомпозиции и реконструкции в фильтровой форме. Подставим выражения (6) в (12). Получим

$$\widetilde{E}_1(j) \ = \ \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{p}_1(j)Z(j) + \widetilde{p}_1(j+m)Z(j+m)\big],\ j \in 0:m-1, \qquad (14)$$

где $\widetilde{p}_1(j) = \frac{1}{2}(1 + U_1(j)) = \frac{1}{2}h_1(j)$. Подставим (6) в (12):

$$\widetilde{D}_1(j) \;\;=\;\; \tfrac{1}{2}[\overline{\widetilde{q}_1(j)}Z(j) + \overline{\widetilde{q}_1(j+m)}Z(j+m)],\; j \in 0 : m-1, \tag{15}$$

где

$$\widetilde{q}_1(j) = \omega_N^{-j}(1 - \alpha_1(j)h_1(j)).$$

Из (12) и (13) легко получить формулы реконструкции в фильтровой форме

$$Z(j) = E_1(j) + D_1(j)\omega_N^{-j} = p_1(j)\widetilde{E}_1(j) + q_1(j)\widetilde{D}_1(j),\; j \in 0 : N-1, \tag{16}$$

где

$$p_1(j) = 2(1 + \alpha_1(j)(1 - U_1(j))), \quad q_1(j) = \omega_N^{-j}(1 - U_1(j)).$$

Замечание 1. При $\alpha_1 = \beta_1$ будет $\widetilde{p}_1 = \frac{1}{2}h_1$, $\widetilde{q}_1 = g_1$, $p_1 = 2\widetilde{h}_1$, $q_1 = \widetilde{g}_1$, т.е. можно сказать, что фильтры декомпозиции и реконструкции в прямой схеме меняются местами с фильтрами реконструкции и декомпозиции в двойственной схеме.

3.3 Многоуровневая декомпозиция сигналов

В результате первого шага декомпозиции сигнала z получается набор $\{\widetilde{E}_1(j), \widetilde{D}_1(j)\}$. Далее процесс декомпозиции можно продолжить, расщепив вектор $\widetilde{e}_1$ на два подмассива e_2, d_2 и продолжив в духе формул (4)-(5).

Будем существенно использовать тот факт, что $N = 2^t$ и обозначение $N_\nu = N/2^\nu$. Введем дискретную функцию

$$U_\nu(j) = \frac{\left(\cos\frac{j\pi}{2N_\nu}\right)^{2r} - \left(\sin\frac{j\pi}{2N_\nu}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{j\pi}{2N_\nu}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{j\pi}{2N_\nu}\right)^{2r}}, \tag{17}$$

Действия прямой лифтинговой схемы для уровней $\nu = 2, 3, \ldots, t$ можно описать так:

1) для $j \in 0 : N_\nu - 1$ вычислим

$$E_\nu(j) = \frac{1}{2}[\widetilde{E}_{\nu-1}(j) + \widetilde{E}_{\nu-1}(j + N_\nu)], \quad D_\nu(j) = \frac{1}{2}\omega^j_{N_{\nu-1}}[\widetilde{E}_{\nu-1}(j) - \widetilde{E}_{\nu-1}(j + N_\nu)]; \tag{18}$$

2) уточним E_ν и D_ν по формулам

$$\widetilde{D}_\nu(j) = D_\nu(j) - E_\nu(j)\omega^j_{N_{\nu-1}}U_\nu(j), \tag{19}$$

$$\widetilde{E}_\nu(j) = E_\nu(j) + \beta_\nu(j)\omega^{-j}_{N_{\nu-1}}\widetilde{D}_\nu(j),\; j \in 0 : N_\nu - 1, \tag{20}$$

где $\beta_\nu(j)$—вещественная функция с периодом $2N_\nu$, обладающая свойством

$$\beta_\nu(j + N_\nu) = -\beta_\nu(j). \tag{21}$$

Замечание 2. О выборе $\beta_\nu(j)$ речь пойдет в п.4.2. С точки зрения числа операций самым трудоемким этапом лифтинговой схемы являются исходные ДПФ $e_1 \mapsto E_1$, $d_1 \mapsto D_1$. Но и с учетом этого сложность алгоритма $O(N \log_2 N)$.

Формулы (19)-(20) можно записать в "фильтровом"виде:

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_\nu(j) &= \tfrac{1}{2}\big[\overline{\widetilde{g}_\nu(j)}\widetilde{D}_{\nu-1}(j) + \overline{\widetilde{g}_\nu(j+N_\nu)}\widetilde{D}_{\nu-1}(j+N_\nu)\big], \\ \widetilde{E}_\nu(j) &= \tfrac{1}{2}\big[\widetilde{h}_\nu(j)\widetilde{E}_{\nu-1}(j) + \widetilde{h}_\nu(j+N_\nu)\widetilde{E}_{\nu-1}(j+N_\nu)\big], \end{aligned} \tag{22}$$

где $j \in 0 : N_\nu - 1$ и

$$\widetilde{h}_\nu(j) = 1 + \beta_\nu(j)(1 - U_\nu(j)), \quad \widetilde{g}_\nu(j) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-j}(1 - U_\nu(j)). \tag{23}$$

Формулы (22) справедливы для $\nu = 1, \ldots, t$, если считать $\widetilde{D}_0 = \widetilde{E}_0 = Z$—ДПФ исходного сигнала z.

3.3.1 Реконструкция сигнала

Результатом декомпозиции сигнала z является набор $\{\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \ldots, \widetilde{D}_t, \widetilde{E}_t\}$. Как восстановить исходный сигнал z ? Из (19)-(20) легко находим

$$E_\nu(j) = \widetilde{E}_\nu(j) - \beta_\nu(j)\omega_{N_{\nu-1}}^{-j}\widetilde{D}_\nu(j),$$

$$D_\nu(j) = \widetilde{D}_\nu(j) + E_\nu(j)\omega_{N_{\nu-1}}^{j}U_\nu(j), \ j \in 0 : N_\nu - 1,$$

$\nu = t, t-1, \ldots, 1$. Зная E_1 и D_1, обратным ДПФ находим e_1 и d_1—четный и нечетный подмассивы массива z.

В фильтровой форме формулы реконструкции записываются в виде

$$\widetilde{E}_{\nu-1}(j) = h_\nu(j)\widetilde{E}_\nu(j) + g_\nu(j)\widetilde{D}_\nu(j), \quad j \in 0 : N_{\nu-1} - 1, \tag{24}$$

где $\nu = t, t-1, \ldots, 1$, а функции h_ν, g_ν определяются по формулам

$$h_\nu(j) = 1 + U_\nu(j), \quad g_\nu(j) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-j}(1 - \beta_\nu(j)h_\nu(j)).$$

Последнее $\widetilde{E}_0(j)$ совпадает с $Z(j)$.

4 Биортогональные базисы

Смысл лифтинговой схемы состоит в том, что она дает коэффициенты разложения сигнала $z(l)$ по вейвлетному базису. Чтобы определить этот базис (а также биортогональный к нему) введем функции $\varphi_1, \widetilde{\varphi}_1, \psi_1, \widetilde{\psi}_1$, имеющие период N и удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{F}_N(\varphi_1) = h_1, \ \mathcal{F}_N(\widetilde{\varphi}_1) = \widetilde{h}_1, \ \mathcal{F}_N(\psi_1) = g_1, \ \mathcal{F}_N(\widetilde{\psi}_1) = \widetilde{g}_1, \tag{25}$$

где $\mathcal{F}_N$—ДПФ длины N. В непрерывном случае такие функции введены в [1].

Рассмотрим систему функций

$$\{\varphi_1(\cdot - 2k), \ k \in 0 : N_1 - 1; \ \psi_1(\cdot - 2k), \ k \in 0 : N_1 - 1\}, \ N_1 = \frac{N}{2}. \tag{26}$$

Оказывается она образует базис в пространстве $\mathbb{C}_N$ всех N-периодических сигналов.

Теорема 1. *Всякий сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается по системе (26):*

$$z(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{e}_1(k)\varphi_1(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{d}_1(k)\psi_1(\cdot - 2k), \tag{27}$$

где $\widetilde{e}_1, \widetilde{d}_1$—векторы, полученные в лифтинговой схеме по формулам (4), (5) (точнее, $\widetilde{e}_1, \widetilde{d}_1$—обратные ДПФ от $\widetilde{E}_1, \widetilde{D}_1$).

Доказательство. Для ДПФ сигнала z справедлива формула (11). Введем обозначения $z_1 = \mathcal{F}_N^{-1}(h_1\widetilde{E}_1)$, $w_1 = \mathcal{F}_N^{-1}(g_1\widetilde{D}_1)$. Тогда $z = z_1 + w_1$. Имеем

$$\begin{aligned} z_1(l) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h_1(j)\widetilde{E}_1(j)\omega_N^{lj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h_1(j)\omega_N^{lj}\sum_{k=0}^{N_1-1}\omega_{N_1}^{-kj}\widetilde{e}_1(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N_1-1}\widetilde{e}_1(k)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h_1(j)\omega_{N_1}^{-kj}\omega_N^{lj} = \sum_{k=0}^{N_1-1}\widetilde{e}_1(k)\varphi_1(l-2k). \end{aligned}$$

Аналогично получаем $w_1(l) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{d}_1(k)\psi_1(l-2k)$.•

Двойственная лифтинговая схема (при $\alpha_1 = \beta_1$) дает коэффициенты разложения по другому базису

$$\{\widetilde{\varphi}_1(\cdot - 2k),\ k \in 0 : N_1 - 1;\ \widetilde{\psi}_1(\cdot - 2k),\ k \in 0 : N_1 - 1\},\ N_1 = \frac{N}{2}. \tag{28}$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1 = \beta_1$. Всякий сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается по системе (28):*

$$z(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} 2\widetilde{e}_1(k)\widetilde{\varphi}_1(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{d}_1(k)\widetilde{\psi}_1(\cdot - 2k), \tag{29}$$

где $\widetilde{e}_1, \widetilde{d}_1$—векторы, полученные в двойственной лифтинговой схеме по формулам (12), (13) (точнее, $\widetilde{e}_1, \widetilde{d}_1$—обратные ДПФ от $\widetilde{E}_1, \widetilde{D}_1$).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и опирается на соотношения (16) и $p_1 = 2\widetilde{h}_1$. •

Разложения (27) и (29) справедливы для произвольного вектора $z \in \mathbb{C}_N$, поэтому (27) и (29) действительно базисы в $\mathbb{C}_N$.

Оказывается базис (29) является биортогональным базису (27) относительно скалярного произведения сигналов $\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}$ как показывает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых $k, m \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства*

1. $\langle \varphi_1(\cdot - 2k), \widetilde{\varphi}_1(\cdot - 2m)\rangle = \delta_{N_1}(k-m)$;

2. $\langle \varphi_1(\cdot - 2k), \widetilde{\psi}_1(\cdot - 2m)\rangle = 0$;

3. $\langle \psi_1(\cdot - 2k), \widetilde{\psi}_1(\cdot - 2m)\rangle = \delta_{N_1}(k-m)$;

4. $\langle \psi_1(\cdot - 2k), \widetilde{\varphi}_1(\cdot - 2m)\rangle = 0$.

Здесь $\delta_{N_1}(k) = 1$, если k делится на N_1, и $\delta_{N_1}(k) = 0$, если k не делится на N_1.

Доказательство всех соотношений проводится по однотипным схемам. Скалярные произведения обозначим $\sigma_{km}^{(i)}$, $i \in 1 : 4$.

Имеем $\mathcal{F}_N(\varphi_1(\cdot-2k))=\omega_N^{-2kj}h_1(j)=\omega_{N_1}^{-kj}h_1(j)$, $\mathcal{F}_N(\widetilde{\varphi}_1(\cdot-2m))=\omega_{N_1}^{-mj}\widetilde{h}_1(j)$. По равенству Парсеваля

$$\sigma_{km}^{(1)}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_{N_1}^{(m-k)j}h_1(j)\overline{\widetilde{h}_1(j)}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_{N_1}^{(m-k)j}(1+H(j)),$$

где функция $H(j)=U_1(j)+\beta_1(j)(1-U_1^2(j))$ имеет период $2N_1$ и обладает свойством $H_1(j+N_1)=-H_1(j)$. Поэтому

$$\sigma_{km}^{(1)}=\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=0}^{N-1}\omega_{N_\nu}^{(m-k)j}+\tfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N_1-1}\omega_{N_1}^{(m-k)j}H(j)=$$
$$=\delta_{N_1}(m-k)+\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=0}^{N_1-1}\omega_{N_1}^{(m-k)j}[H(j)+H(j+N_1)]=\delta_{N_1}(m-k).$$

Утверждения 2-4 доказываются аналогично . •

В лемме 1 от функции β_1 не требовалось ничего, кроме свойства $\beta_1(j+N_1)=-\beta_1(j)$. Если же выбрать $\beta_1(j)$ в нужном виде, то устанавливаются ещё два важных свойства.

Лемма 2. *Пусть* $\beta_1(j)=U_1(j)/(1+U_1^2(j))$. *Тогда справедливо следующее соотношение ортогональности*

$$\langle\varphi_1(\cdot-2k),\psi_1(\cdot-2m)\rangle=0\quad\forall k,m\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Имеем $\mathcal{F}_N(\psi_1(\cdot-2k))=\omega_{N_1}^{-kj}g_1(j)$. По равенству Парсеваля скалярное произведение равно

$$\sigma_{km}^{(2)}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_{N_1}^{(m-k)j}h_1(j)\overline{g_1(j)}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_{N}^{(2m-2k+1)j}G(j),$$

где $G(j)=1+U_1(j)-\beta_1(j)(1+U_1(j))^2$. Отсюда

$$\begin{aligned}\sigma_{km}^{(2)}&=\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=0}^{2N_1-1}\omega_N^{(2m-2k+1)j}G(j)=\\&=\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=0}^{N_1-1}\left[\omega_N^{(2m-2k+1)j}G(j)+\omega_N^{(2m-2k+1)(j+N_1)}G(j+N_1)\right].\end{aligned}$$

Поскольку $\omega_N^{N_1}=-1$, то квадратная скобка равна нулю, если выполнено условие $G(j+N_1)=G(j)$, что эквивалентно

$$-U_1(j)+\beta_1(j)(1-U_1(j))^2=U_1(j)-\beta_1(j)(1+U_1(j))^2.$$

Отсюда $\beta_1(j)=U_1(j)/(1+U_1^2(j))$, что и в условиях теоремы. В итоге $\sigma_{km}^{(2)}=0$ для всех k,m. •

Введем подпространства, являющиеся линейными оболочками сдвигов функций φ_1 и ψ_1:

$$V_1=\mathcal{L}\{\varphi_1(\cdot-2k)|k\in 0:N_1-1\},\ W_1=\mathcal{L}\{\psi_1(\cdot-2k)|k\in 0:N_1-1\}.$$

Поскольку элементы базиса (26) линейно независимы, то $\dim V_1=\dim W_1=N_1$ и $\mathbb{C}_N$ есть прямая сумма V_1 и W_1: $\mathbb{C}_N=V_1\dot{+}W_1$.

Замечание 3. В условиях леммы 2 имеем, что $V_1\perp W_1$, а тогда $V_1\oplus W_1=\mathbb{C}_N$. Из свойства 4 леммы 1 следует, что $\widetilde{\varphi}_1(\cdot-2k)\in V_1$, а из свойства 2 следует, что $\widetilde{\psi}_1(\cdot-2k)\in W_1$ для всех k. В силу $V_1\perp W_1$ получаем дополнительное свойство $\langle\widetilde{\varphi}_1(\cdot-2k),\widetilde{\psi}_1(\cdot-2m)\rangle=0$ $\forall k,m\in\mathbb{Z}$.

4.1 Базисные функции и подпространства при $\nu > 1$

При $\nu = 2, \ldots, t$ введем базисные функции $f_\nu, \widetilde{f}_\nu, \psi_\nu, \widetilde{\psi}_\nu$, имеющие период N и удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_N(\varphi_\nu) = H_\nu, &\quad H_\nu(j) = h_1(j)\ldots h_{\nu-1}(j)h_\nu(j),\\
\mathcal{F}_N(\widetilde{\varphi}_\nu) = \widetilde{H}_\nu, &\quad \widetilde{H}_\nu(j) = \widetilde{h}_1(j)\ldots \widetilde{h}_{\nu-1}(j)\widetilde{h}_\nu(j),\\
\mathcal{F}_N(\psi_\nu) = G_\nu, &\quad G_\nu(j) = h_1(j)\ldots h_{\nu-1}(j)g_\nu(j),\\
\mathcal{F}_N(\widetilde{\psi}_\nu) = \widetilde{G}_\nu, &\quad \widetilde{G}_\nu(j) = \widetilde{h}_1(j)\ldots \widetilde{h}_{\nu-1}(j)\widetilde{g}_\nu(j),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_N$—ДПФ длины N. В непрерывном случае такие функции введены в [1].

Введем подпространства, являющиеся линейными оболочками сдвигов функций φ_ν и ψ_ν:

$$V_\nu = \mathcal{L}\{\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k) | k \in 0 : N_\nu - 1\},\ W_\nu = \mathcal{L}\{\psi_\nu(\cdot - 2^\nu k) | k \in 0 : N_\nu - 1\}.$$

Наша ближайшая цель—показать, что $V_\nu = V_{\nu+1} \dot{+} W_{\nu+1}$ (V_0—это пространство $\mathbb{C}_N$ всех N-периодических сигналов).

Лемма 3. *Справедливы включения*

$$V_{\nu+1} \subset V_\nu, \quad W_{\nu+1} \subset V_\nu,\ \nu \in 1 : t-1.$$

Доказательство. Имеем с учетом равенства $H_{\nu+1}(j) = h_{\nu+1}(j)H_\nu(j)$

$$\varphi_{\nu+1}(l - 2^{\nu+1}m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj}\omega_{N_\nu}^{-2mj} h_{\nu+1}H_\nu(j),$$

$$\varphi_\nu(l - 2^\nu k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj}\omega_{N_\nu}^{-kj} H_\nu(j).$$

Нужно доказать, что существуют коэффициенты $c^m(k)$ такие, что

$$\varphi_{\nu+1}(l - 2^{\nu+1}m) = \sum_{k=0}^{N_\nu-1} c^m(k)\varphi_\nu(l - 2^\nu k).$$

Это выполнено, если

$$\sum_{k=0}^{N_\nu-1} c^m(k)\omega_{N_\nu}^{-kj} = \omega_{N_\nu}^{-2mj} h_{\nu+1}(j),\ j \in 0 : N-1.$$

Обе части этого равенства имеют период N_ν. В качестве $\{c^m(k)\}$ возьмем обратное ДПФ (длины N_ν) от $\{\omega_{N_\nu}^{-2mj} h_{\nu+1}(j)\}$. Тогда $V_{\nu+1} \subset V_\nu$. Аналогично показывается, что $W_{\nu+1} \subset V_\nu$. •

Справедливо утверждение, аналогичное лемме 1.

Лемма 4. *Справедливы следующие соотношения биортогональности и ортогональности (для любого $\nu \in 1 : t$ и любых $k, m \in \mathbb{Z}$):*

1. $\langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m)\rangle = \delta_{N_\nu}(k - m)$;

2. $\langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \widetilde{\psi}_\nu(\cdot - 2^\nu m)\rangle = 0$;
3. $\langle \psi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \widetilde{\psi}_\nu(\cdot - 2^\nu m)\rangle = \delta_{N_\nu}(k-m)$;
4. $\langle \psi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m)\rangle = 0$.

Здесь $\delta_{N_\nu}(k) = 1$, *если* k *делится на* N_ν, *и* $\delta_{N_\nu}(k) = 0$, *если* k *не делится на* N_ν.

Доказательство всех соотношений проводится однотипно. Скалярные произведения обозначим $\sigma_{km}^{(i)}$, $i \in 1:4$.

Имеем $\mathcal{F}_N(\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k)) = \omega_{N_\nu}^{-kj} H_\nu(j)$, $\mathcal{F}_N(\widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m)) = \omega_{N_\nu}^{-mj} \widetilde{H}_\nu(j)$. По равенству Парсеваля

$$\sigma_{km}^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} H_\nu(j)\overline{\widetilde{H}_\nu(j)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} h_1(j)\widetilde{h}_1(j)\ldots h_\nu(j)\widetilde{h}_\nu(j).$$

Чтобы не писать громоздких формул, будем считать, что $\nu = 2$. Имеем

$$\sigma_{km}^{(1)} = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_2}^{(m-k)j}[1 + U_1(j) + \beta_1(j)(1 - U_1^2(j))][1 + U_2(j) + \beta_2(j)(1 - U_2^2(j))] =$$
$$= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_2}^{(m-k)j} + \tfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_2}^{(m-k)j}[M_1(j) + M_2(j) + M_1(j)M_2(j)],$$

где $M_1(j) = U_1(j) + \beta_1(j)(1 - U_1^2(j))$ имеет период $2N_1 = N$ и обладает свойством $M_1(j + N_1) = -M_1(j)$, а $M_2(j)$ имеет период $2N_2 = N_1$ и обладает свойством $M_2(j + N_2) = -M_2(j)$. Отсюда

$$\sigma_{km}^{(1)} = \delta_{N_2}(m-k) + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N_1-1} \omega_{N_2}^{(m-k)j}[M_1(j) + M_1(j+N_1) + 2M_2(j) + (M_1(j) + M_1(j+N_1))M_2(j)].$$

Поскольку $M_1(j) + M_1(j + N_1) = 0$, то

$$\sigma_{km}^{(1)} = \delta_{N_2}(m-k) + \frac{1}{N_1}\sum_{j=0}^{N_2-1} \omega_{N_2}^{(m-k)j}[M_2(j) + M_2(j+N_1)] = \delta_{N_2}(m-k).$$

Утверждения 2–4 доказываются аналогично. •

При доказательстве леммы от функции β_ν не требовалось ничего, кроме свойства $\beta_\nu(j + N_\nu) = -\beta(j)$. Если же выбрать β_ν в нужном виде, то можно обеспечить ортогональность подпространств V_ν и W_ν.

Лемма 5. *Зафиксируем* $\nu \in 1:t$. *Если выбрать* β_ν *по формуле*

$$\beta_\nu(j) = (h_\nu(j)A_\nu(j) - h_\nu(j + N_\nu)A_\nu(j + N_\nu))/A_{\nu+1}(j), \tag{30}$$

где функции A_ν *и* $A_{\nu+1}$ *определяются рекуррентно:*

$$A_{k+1}(j) = h_k^2(j)A_k(j) + h_k^2(j + N_k)A_k(j + N_k),\ k \in 0:\nu,\ A_1(j) = 1, \tag{31}$$

то подпространство V_ν *ортогонально* W_ν.

Доказательство. При $\nu = 1$ утверждение леммы совпадает с утверждением леммы 2. При $\nu > 1$ скалярные произведения $\sigma_{km} = \langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \psi_\nu(\cdot - 2^\nu m)\rangle$ будем вычислять как в лемме 4:

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} H_\nu(j)\overline{G_\nu(j)} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_{\nu-1}}^{(2m-2k+1)j} h_1^2(j)\ldots h_{\nu-1}^2(j)h_\nu(j)(1 - \beta_\nu(j)h_\nu(j)).$$

Для уменьшения громоздкости формул будем считать, что $\nu = 3$. Имеем

$$\sigma_{km} \; = \; \tfrac{1}{N}\sum_{j=0}^{N_1-1} \omega_{N_2}^{(2m-2k+1)j} h_2^2(j)h_3(j)(1-\beta_3(j)h_3(j))\left[h_1^2(j)+h_1^2(j+N_1)\right].$$

Выражение в квадратных скобках есть $A_2(j)$. Далее имеем

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N_2-1} \omega_{N_2}^{(2m-2k+1)j} h_3(j)(1-\beta_3(j)h_3(j))\left[h_2^2(j)A_2(j)+h_2^2(j+N_2)A_2(j+N_2)\right].$$

В квадратных скобках стоит $A_3(j)$. Далее

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N_3-1}\left[\omega_{N_2}^{(2m-2k+1)j}M_3(j)+\omega_{N_2}^{(2m-2k+1)(j+N_3)}M_3(j+N_3)\right],$$

где $M_3(j) = h_3(j)(1-\beta_3(j)h_3(j))A_3(j)$. Приравнивая $M_3(j)$ к $M_3(j+N_3)$, получаем для $\beta_3(j)$ формулу (30) при $\nu = 3$. •

4.2 Выбор управляющей функции β_ν

Возможны три основных выбора β_ν:

1) Положим $\beta_\nu(j) = U_\nu(j)/(1+U_\nu^2(j))$. Это обеспечивает ортогональность $V_1 \perp W_1$ (см. лемму 2). Привлекательным моментом такого выбора является то, что β_ν получается прореживанием функции β_1: $\beta_\nu(j) = \beta_1(2^{\nu-1}j)$.

2)$\beta_\nu(j) = \frac{1}{2}U_\nu(j)$, $\nu = 1,\dots,t$. Этот выбор предложен в [1], там же приводится его обоснование.

3)Можно при каждом ν выбирать β_ν из условия ортогональности, т.е. по формуле (30) в лемме 5.

4.3 Лифтинговая схема дает коэффициенты разложения

Утверждение 1 леммы 4 означает, что системы $\{\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k)\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ и $\{\widetilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu k)\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ биортогональны и, значит, каждая система линейно независима. Значит подпространство $V_\nu = \mathfrak{L}\{\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k)\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ имеет размерность N_ν. Аналогично $\dim W_\nu = N_\nu$. Отсюда $V_{\nu+1}\dot{+}W_{\nu+1} = V_\nu$. В результате получим вейвлетное разложение пространства $\mathbb{C}_N$ при $N = 2^t$ в прямую сумму подпространств:

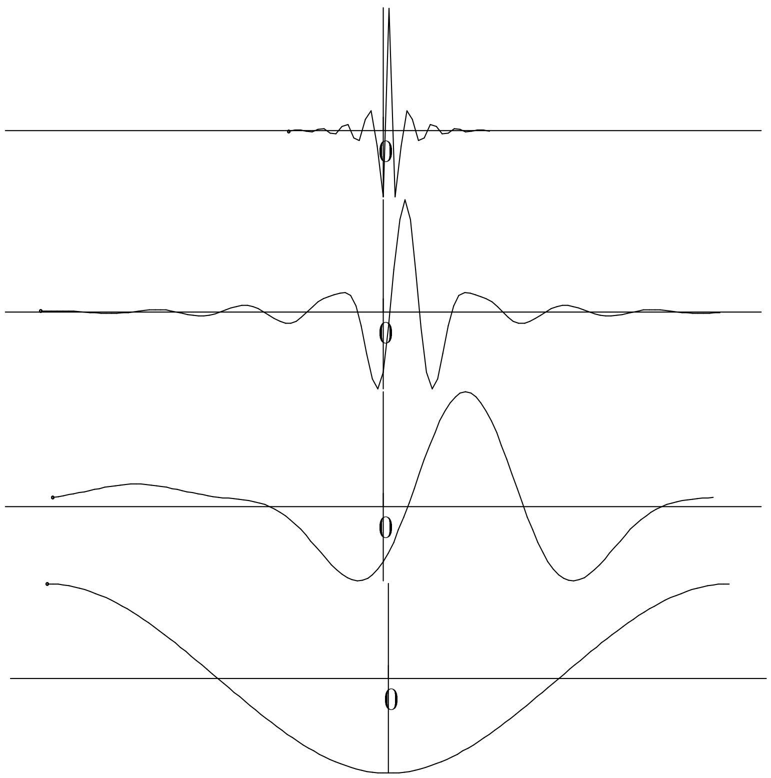
$$\mathbb{C}_N = V_t \dot{+} W_t \dot{+} W_{t-1} \dot{+} \dots \dot{+} W_1. \tag{32}$$

Аналогичные разложения можно найти во многих работах, например, [6,8]. В [6, с.53], [8] предполагается, что выполнено свойство: если $f \in V_\nu$, то $f(2\cdot) \in V_{\nu-1}$. Для наших подпространств V_ν это свойство не выполняется.

Любой сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается в сумму

$$z(l) = \widetilde{e}_t(0)\varphi_t(l) + \sum_{\nu=1}^{t}\sum_{k=0}^{N_\nu-1}\widetilde{d}_\nu(k)\psi_\nu(l-2^\nu k). \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что при $\nu = t$ будет $N_t = 1$, $\varphi_t(l) \equiv 1$, так что первое слагаемое постоянно. В ряду функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t$ сигнал ψ_1 имеет самую большую частоту, а ψ_t— самую малую, что хорошо видно на графиках:



Фиг. 1. Графики функций ψ_1, ψ_3, ψ_5, ψ_7 при $N = 128$, $t = 7$, $r = 3$, β_ν выбраны по способу 1). Для наглядности точки $(j, \psi_\nu(j))$ соединены отрезками.

Коэффициенты разложения (33) получаются в прямой лифтинговой схеме (см. п.3.3).

Теорема 3. *Компоненты векторов $\{\widetilde{e}_t, \widetilde{d}_t, \ldots, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_1\}$, полученные в прямой лифтинговой схеме, являются коэффициентами в разложении (33).*

Доказательство. Как было показано в теореме 1, справедливо равенство $z = z_1 + w_1$, где

$$z_1(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{e}_1(k)\varphi_1(\cdot - 2k), \quad w_1(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{d}_1(k)\psi_1(\cdot - 2k).$$

Найдем ДПФ $Z_1 = \mathcal{F}_N(z_1)$. Имеем по формулам обращения ДПФ

$$\widetilde{e}_1(k) = \frac{1}{N_1}\sum_{s=0}^{N_1-1} \widetilde{E}_1(s)\omega_{N_1}^{ks}, \quad \varphi_1(l - 2k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj}\omega_{N_1}^{-kj}h_1(j).$$

Отсюда

$$z_1(l) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \widetilde{e}_1(k)\varphi_1(l-2k) = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N_1-1} \widetilde{E}_1(s)\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{lj}h_1(j)\left[\frac{1}{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1}\omega_{N_1}^{k(s-j)}\right].$$

Выражение в скобках есть $\delta_{N_1}(s-j)$. Поэтому

$$z_1(l) = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N_1-1}\widetilde{E}_1(s)\left[\omega_N^{ls}h_1(s) + \omega_N^{l(s+N_1)}h_1(s+N_1)\right] = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\widetilde{E}_1(j)h_1(j)\omega_N^{lj}$$

(учли, что $\widetilde{E}_1$ имеет период N_1). Отсюда следует, что ДПФ от z_1 имеет вид $Z_1(j) = h_1(j)\widetilde{E}_1(j)$.

По формуле реконструкции (22) $\widetilde{E}_1(j) = h_2(j)\widetilde{E}_2(j) + g_2(j)\widetilde{D}_2(j)$. Отсюда

$$Z_1(j) = h_1(j)h_2(j)\widetilde{E}_2(j) + h_1(j)g_2(j)\widetilde{D}_2(j).$$

Введем обозначения $z_2 = \mathcal{F}_N^{-1}(h_1 h_2 \widetilde{E}_2)$ и $w_2 = \mathcal{F}_N^{-1}(h_1 g_2 \widetilde{D}_2)$. Получим $z_1 = z_2 + w_2$. Имеем

$$z_2(l) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h_1(j)h_2(j)\widetilde{E}_2(j)\omega_N^{lj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{lj}h_1(j)h_2(j)\sum_{k=0}^{N_2-1}\omega_{N_2}^{-kj}\widetilde{e}_2(k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N_2-1}\widetilde{e}_2(k)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N^{lj}\omega_{N_2}^{-kj}h_1(j)h_2(j) = \sum_{k=0}^{N_2-1}\widetilde{e}_2(k)\varphi_2(l-4k).$$

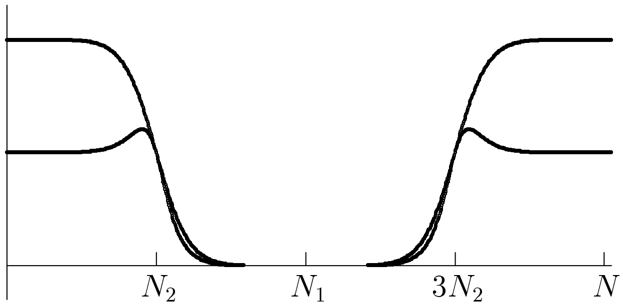
Аналогично показывается, что $w_2(l) = \sum_{k=0}^{N_2-1}\widetilde{d}_2(k)\psi_2(l-4k)$.

Далее показывается, что $Z_2(j) = \widetilde{E}_2(j)h_1(j)h_2(j)$ и $z_2 = z_3 + w_3$, где $z_3 \in V_3$, $w_3 \in W_3$. В результате придем к разложению $z = z_t + w_t + \cdots + w_1$, т.е. к разложению (33). •

Замечание 4. Функция

$$h_1(j) = \frac{2\left(\cos\frac{j\pi}{N}\right)^{2r}}{\left(\cos\frac{j\pi}{N}\right)^{2r} + \left(\sin\frac{j\pi}{N}\right)^{2r}},\ j \in 0:N,$$

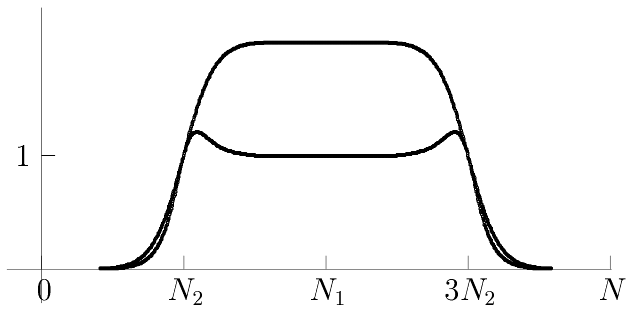
имеет типично фильтровой вид (см. Фиг. 2; она является дискретным вариантом фильтра Баттерворта (см. [9, с.128])).



Фиг.2. Функции $h_1(j)$(верхний график) и $\widetilde{h}_1(j)$(нижний график) при $r = 3$.

Она близка к нулю в промежутке $N_2+1 : 3N_2-1$ и близка к 2 в $0 : N_2-1 \cup 3N_2+1 : N$ (в точках $N_2 = N/4$ и $3N_2 = 3N/4$ имеем $h_1(N_2) = h_1(3N_2) = 1$). При увеличении r график становится почти прямоугольным. Поэтому спектр $Z_1(j) = h_1(j)\widetilde{E}_1(j)$ сосредоточен в $0 : N_2-1 \cup 3N_2+1 : N$, что указывает на низкочастотность сигнала z_1.

Замечание 5. Точно также как и в теореме 2 находится ДПФ $W_1 = \mathcal{F}_N(w_1)$, а именно $W_1(j) = g_1(j)\widetilde{D}_1(j)$. Вид функции $|g_1(j)|$ и $|\widetilde{g}_1(j)|$ приведен на фиг. 3.



Фиг.3. Функции $|g_1(j)|$(верхний график) и $|\widetilde{g}_1(j)|$(нижний график) при $r = 3$.

Поэтому спектр $W_1(j)$ сосредоточен в промежутке $N_2 + 1 : 3N_2 - 1$, т.е. сигнал w_1—высокочастотный.

Замечание 6. При $\nu > 1$ ДПФ от z_ν и w_ν даются формулами $\mathcal{F}_N(z_\nu) = H_\nu(j)\widetilde{E}_\nu(j)$ и $\mathcal{F}_N(w_\nu) = G_\nu(j)\widetilde{D}_\nu(j)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zheludev V.A., Averbuch A.Z. A biorthogonal wavelet scheme based on interpolatory splines//Proceedings Second Int. Conf. "Tools for math. modelling'99". June 14-19, 1999. V.4. St. Petersburg: SPTU, 1999, P.214–231.

2. Donoho D.L. Interpolating wavelet transform//Preprint 408. Dept. of Statistics. Stanford Univ., 1992.

3. Sweldens W. The lifting scheme: A custom design construction of biorthogonal wavelets//Appl. Comput. Harm. Anal. 1996. V.3. N 2. P. 186–200.

4. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38. N 8. С.1235–1246.

5. Strang G., Nguen T. Wavelets and filter banks. Wellesley-Cambridge Press, 1996.

6. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб: СПбТУ, 1999. 132 с.

7. Sweldens W., Schröder P. Building your own wavelets at home// In "Wavelets in Computer Graphics". ACM SIGGRAPH Course Notes. 1996.

8. Skopina M. Multiresolution analysis of periodic functions// East J. on Approximations. 1997. V.3. P.203-224.

9. Каппелини В. и др. Цифровые фильтры и их применение. М.:Энергоатомиздат, 1983.