СМЕШИВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ*

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

27 октября 2007 г.

Данная работа примыкает к [1].

1°. Рассмотрим простейшую задачу геометрического моделирования: соединить кривой две данные точки $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$. Очевидным решением этой задачи является отрезок с концами a_1 и a_2, определяемый вектор-функцией

$$r(t) = (1-t)\, a_1 + t\, a_2, \quad t \in [0,1].$$

Вместо коэффициентов $1-t$ и t можно использовать любые функции $H_1(t)$ и $H_2(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} H_1(0) &= 1, \quad H_1(1) = 0, \\ H_2(0) &= 0, \quad H_2(1) = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Функции H_1 и H_2 называют *смешивающими функциями*.

Используя смешивающие функции, можно решить следующую задачу: построить непрерывную кривую, проходящую через точки $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^3$. Для этого определим вектор-функцию $r\colon [0,n] \to \mathbb{R}^3$:

$$r(u) = H_1(u-k)\, a_k + H_2(u-k)\, a_{k+1}, \qquad u \in [k, k+1], \quad k \in 0 : n-1.$$

Перейдём теперь к рассмотрению более сложной задачи: построить кривую по заданным конечным точкам $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ и касательным векторам в этих точках $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$. Решение этой задачи можно получить с использованием четырёх смешивающих функций, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &H_1(0) = 1, \quad H_1'(0) = 0, \quad H_1'(1) = 0, \quad H_1(1) = 0; \\ &H_2(0) = 0, \quad H_2'(0) = 1, \quad H_2'(1) = 0, \quad H_2(1) = 0; \\ &H_3(0) = 0, \quad H_3'(0) = 0, \quad H_3'(1) = 1, \quad H_3(1) = 0; \\ &H_4(0) = 0, \quad H_4'(0) = 0, \quad H_4'(1) = 0, \quad H_4(1) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

*Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD»: `http://www.dha.spb.ru/`

Тогда для вектор-функции

$$r(t) = H_1(t)\, a_1 + H_2(t)\, b_1 + H_3(t)\, b_2 + H_4(t)\, a_2, \qquad t \in [0,1], \tag{3}$$

выполнены равенства

$$r(0) = a_1, \quad r'(0) = b_1, \quad r'(1) = b_2, \quad r(1) = a_2,$$

то есть вектор-функция $r(t)$ задаёт кривую в $\mathbb{R}^3$ с концами a_1 и a_2 и касательными векторами на концах b_1 и b_2.

Смешивающие функции, удовлетворяющие условиям (2), можно также использовать для решения следующей задачи: построить гладкую кривую, проходящую через точки $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^3$, для которой векторы касательных в точках a_j равны b_j, $j \in 0 : n$. Решением будет кривая, задаваемая функцией $r\colon [0,n] \to \mathbb{R}^3$:

$$r(u) = H_1(u-k)\, a_k + H_2(u-k)\, b_k + H_3(u-k)\, b_{k+1} + H_4(u-k)\, a_{k+1},$$
$$u \in [k, k+1], \quad k \in 0 : n-1.$$

Кроме того, смешивающие функции, удовлетворяющие условиям (2), можно использовать для построения параметрической поверхности Кунса (см. [2]).

2°. Введём общее определение. Пусть $T \subset C\big([0,1]\big)$ — линейное пространство, $L_1, \ldots, L_n\colon T \to \mathbb{R}$ — линейные функционалы. Функции $H_1, \ldots, H_n \in T$, удовлетворяющие условиям

$$L_i(H_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 1 : n, \tag{4}$$

будем называть смешивающими функциями для функционалов $L_1, \ldots, L_n$.

Рассмотрим интересующие нас частные случаи.

1) $n = 2$, $T = C\big([0,1]\big)$, $L_1(f) = f(0)$, $L_2(f) = f(1)$. В этом случае условия (4) принимают вид (1).

2) $n = 4$, $T = C^1\big([0,1]\big)$,

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f'(1), \quad L_4(f) = f(1).$$

В этом случае условия (4) принимают вид (2).

3) $n = 6$, $T = C^2\big([0,1]\big)$,

$$L_1(f) = f(0), \quad L_2(f) = f'(0), \quad L_3(f) = f''(0),$$
$$L_4(f) = f''(1), \quad L_5(f) = f'(1), \quad L_6(f) = f(1).$$

Смешивающие функции H_j, удовлетворяющие условиям (4), можно использовать для построение кривой по заданным концам и производным первого и второго порядка в конечных точках. Кроме того, с их помощью можно построить кривую класса C^2, проходящую через заданные точки и имеющую в них заданные первые и вторые производные.

В дальнейшем мы будем ссылаться на эти частные случаи как на случаи $n = 2$, $n = 4$ и $n = 6$, полагая, что пространство T и функционалы L_i определяются для данного n так, как описано выше.

Пусть заданы функции $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in T$. Будем искать смешивающие функции в виде

$$H_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\, \gamma_k(t), \qquad \alpha_{jk} \in \mathbb{R}, \quad j \in 1:n. \tag{5}$$

Если учесть линейность функционалов L_i, то равенство (4) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\, L_i(\gamma_k) = \delta_{ij}. \tag{6}$$

Введём матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} L_1(\gamma_1) & L_2(\gamma_1) & \cdots & L_n(\gamma_1) \\ L_1(\gamma_2) & L_2(\gamma_2) & \cdots & L_n(\gamma_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(\gamma_n) & L_2(\gamma_n) & \cdots & L_n(\gamma_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (6) можно переписать в виде $A\,G = E_n$, то есть $A = G^{-1}$.

Таким образом, если для заданных функций γ_k матрица G обратима, то можно взять коэффициенты α_{jk} из матрицы G^{-1} и построить смешивающие функции H_j по формуле (5).

3°. Полиномиальные смешивающие функции.

Пусть $\gamma_k(t) = t^{k-1}$, $k \in 1:n$. Смешивающие функции H_j будут полиномами степени не выше $n-1$.

Случай $n = 2$. Имеем $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = t$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $H_1(t) = 1 - t$, $H_2(t) = t$.

Случай $n = 4$. Имеем $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = t^2$, $\gamma_4(t) = t^3$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$H_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \qquad H_3(t) = t^3 - t^2,$$
$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t, \qquad H_4(t) = -2t^3 + 3t^2.$$

Полученные H_j являются кубическими полиномами Эрмита. Их графики изображены на рис. 1.

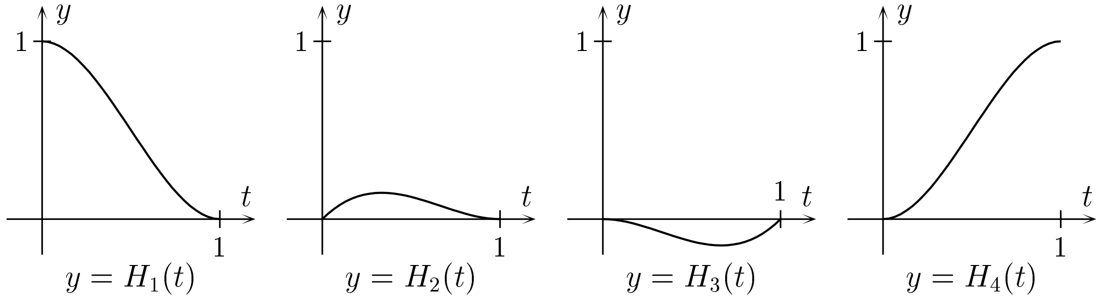

Рис. 1. Кубические полиномы Эрмита

Случай $n = 6$. Имеем, $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = t^2$, $\gamma_4(t) = t^3$, $\gamma_5(t) = t^4$, $\gamma_6(t) = t^5$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & 15 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -15 & 6 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} H_1(t) &= -6t^5 + 15t^4 - 10t^3 + 1, \\ H_2(t) &= -3t^5 + 8t^4 - 6t^3 + t, \\ H_3(t) &= (-t^5 + 3t^4 - 3t^3 + t^2)/2, \\ H_4(t) &= (t^5 - 2t^4 + t^3)/2, \\ H_5(t) &= -3t^5 + 7t^4 - 4t^3 + 1, \\ H_6(t) &= 6t^5 - 15t^4 + 10t^3. \end{aligned}$$

В этом случае H_j — полиномы Эрмита пятой степени. Их графики изображены на рис. 2.

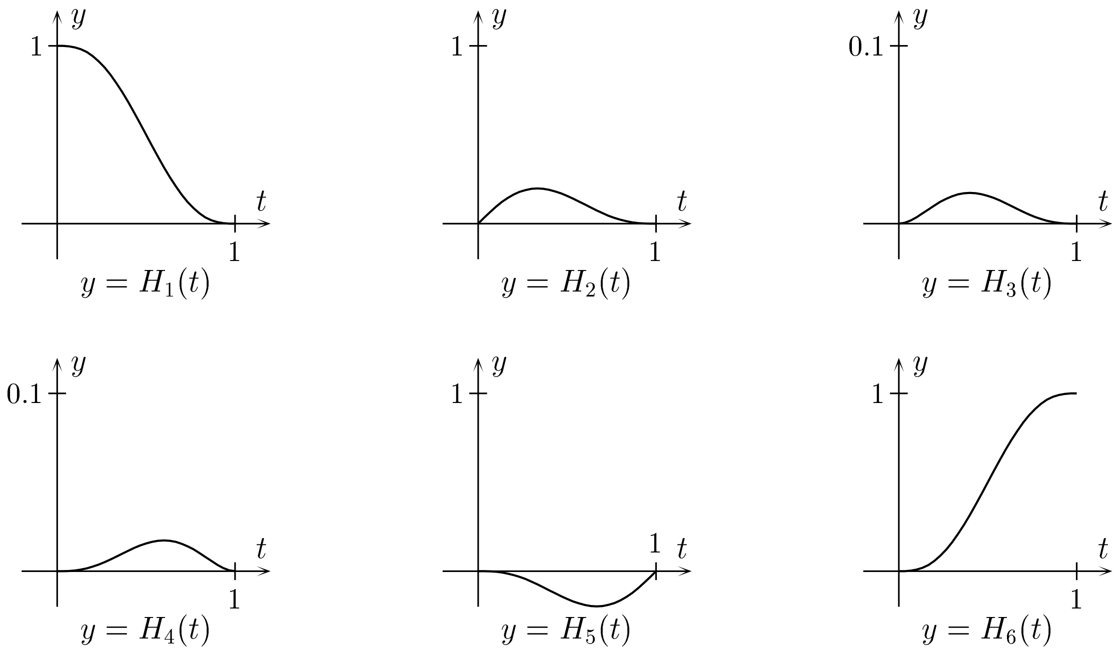

Рис. 2. Полиномы Эрмита пятой степени

4°. Экспоненциальные смешивающие функции.

Пусть функции $\gamma_k(t)$ выбираются из функций $t^i e^{jqt}$, где q — ненулевая константа, i и j — целые неотрицательные числа. Смешивающие функции, построенные для данных γ_k, будем называть экспоненциальными.

Случай $n = 2$. Возьмём $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = e^{qt}$. Имеем

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^q \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \frac{1}{e^q - 1} \begin{pmatrix} e^q & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$H_1(t) = \frac{e^q - e^{qt}}{e^q - 1}\,, \qquad H_2(t) = \frac{e^{qt} - 1}{e^q - 1}\,.$$

Случай $n = 4$. Возьмём $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = e^{qt}$, $\gamma_4(t) = te^{qt}$. Имеем

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & qe^q & e^q \\ 0 & 1 & e^q(1+q) & e^q \end{pmatrix}.$$

Графики функций $H_j(t)$ при $q = 3$ показаны на рис. 3, а при $q = 10$ — на рис. 4.

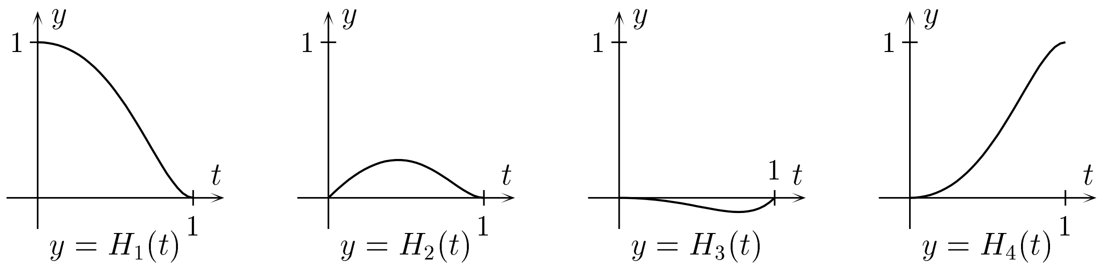

Рис. 3. Экспоненциальные смешивающие функции, $n = 4$, $q = 3$

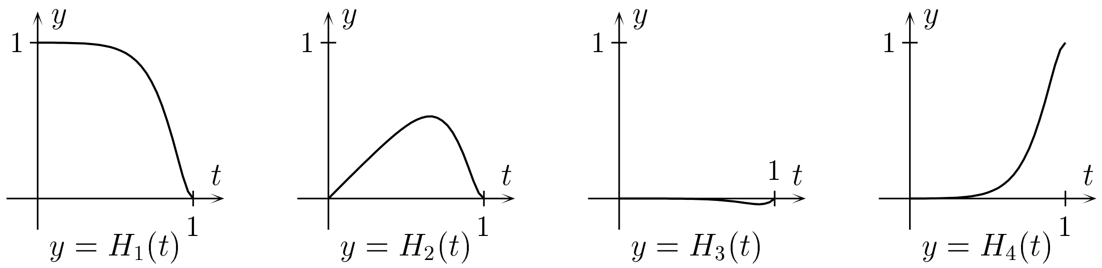

Рис. 4. Экспоненциальные смешивающие функции, $n = 4$, $q = 10$

Случай $n = 6$. Возьмём $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = t$, $\gamma_3(t) = t^2$, $\gamma_4(t) = e^{qt}$, $\gamma_5(t) = te^{qt}$, $\gamma_6(t) = t^2e^{qt}$. Графики функций $H_j(t)$ при $q = 2$ показаны на рис. 5.

5°. Дробно-рациональные смешивающие функции.

Пусть $\gamma_k(t) = \dfrac{1}{1 - c_k t}$, где $c_1, \dots, c_n$ — различные вещественные числа, $c_k < 1$ при $k \in 1 : n$. Смешивающие функции будут иметь вид дробно-рациональных функций от t.

Случай $n = 2$. Имеем

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-c_1} \\ 1 & \frac{1}{1-c_2} \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \frac{1}{c_1 - c_2} \begin{pmatrix} c_1 - 1 & 1 - c_2 \\ (c_1 - 1)(c_2 - 1) & (c_1 - 1)(1 - c_2) \end{pmatrix}.$$

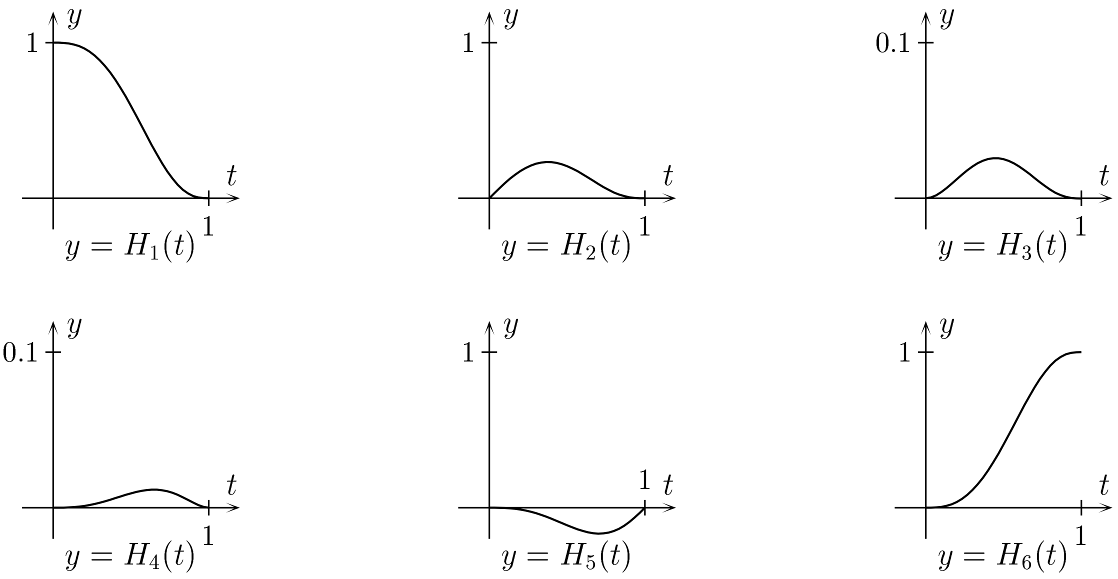

Рис. 5. Экспоненциальные смешивающие функции, $n = 6$, $q = 2$

Значит,

$$H_1(t) = \frac{c_1 - 1}{c_1 - c_2}\,\frac{1}{1 - c_1 t} + \frac{1 - c_2}{c_1 - c_2}\,\frac{1}{1 - c_2 t},$$

$$H_2(t) = \frac{1 - c_2}{c_1 - c_2}\,\frac{1 - c_1}{1 - c_1 t} + \frac{c_1 - 1}{c_1 - c_2}\,\frac{1 - c_2}{1 - c_2 t}.$$

Случай $n = 4$. Графики смешивающих функций $H_j(t)$ для набора параметров $c = (-2,\ -1,\ 0,\ 0.5)$ показаны на рис. 6, а для набора параметров $c = (-8,\ -5,\ -2,\ 0.75)$ — на рис. 7.

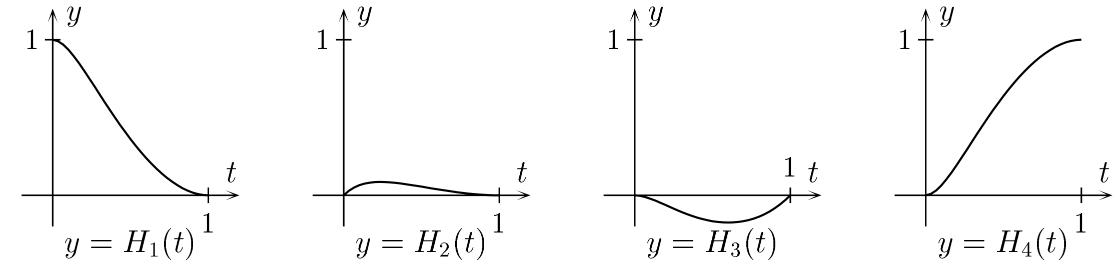

Рис. 6. Дробно-рациональные смешивающие функции, $c = (-2,\ -1,\ 0,\ 0.5)$

Случай $n = 6$. Графики смешивающих функций $H_j(t)$ для набора параметров $c = (-4,\ -2,\ -1,\ 0,\ 0.2,\ 0.7)$ показаны на рис. 8.

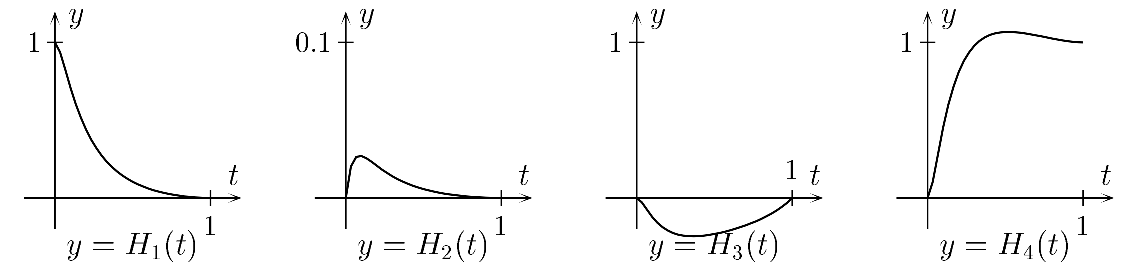

Рис. 7. Дробно-рациональные смешивающие функции, $c = (-8,\ -5,\ -2,\ 0.75)$

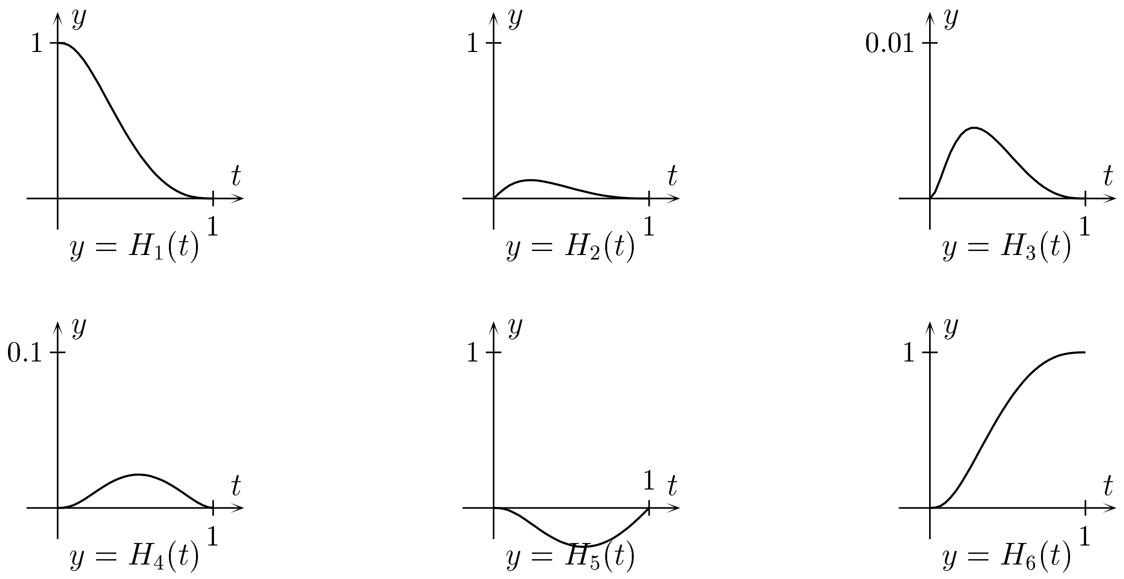

Рис. 8. Дробно-рациональные смешивающие функции, $n = 6$

6°. Логарифмические смешивающие функции.

Пусть $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_k(t) = \ln(1 + c_{k-1}t)$ при $k \in 2 : n$, где $c_1, \ldots, c_{n-1}$ — различные вещественные числа, $c_j > -1$, $c_j \neq 0$ для $j \in 1 : n-1$. Смешивающие функции, построенные для таких γ_k, будем называть логарифмическими.

Случай $n = 2$. Имеем $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = \ln(1 + c_1 t)$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \ln(1+c_2) \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \frac{1}{\ln(1+c_2)} \begin{pmatrix} \ln(1+c_2) & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$H_1(t) = 1 - \frac{\ln(1+c_2 t)}{\ln(1+c_2)}, \qquad H_2(t) = \frac{\ln(1+c_2 t)}{\ln(1+c_2)}.$$

Случай $n = 4$. Графики смешивающих функций $H_j(t)$ для набора параметров $c = (1,\ 2,\ 3)$ показаны на рис. 9.

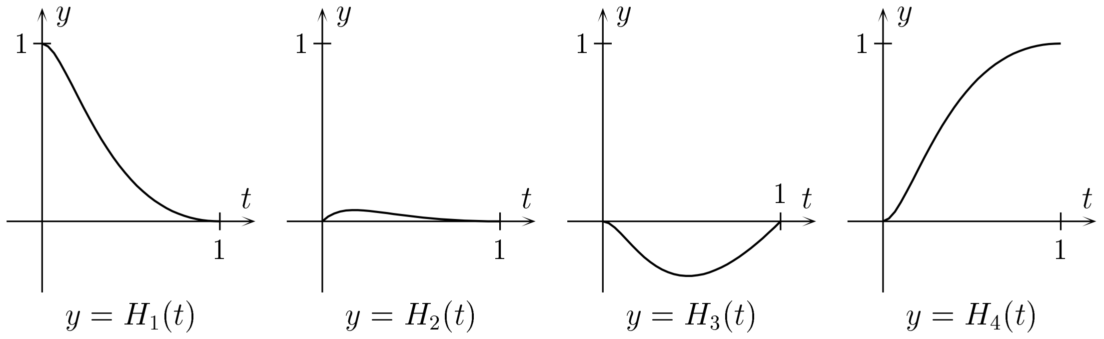

Рис. 9. Логарифмические смешивающие функции, $n = 4$

Случай $n = 6$. Графики смешивающих функций $H_j(t)$ для набора параметров $c = (1,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10)$ показаны на рис. 10.

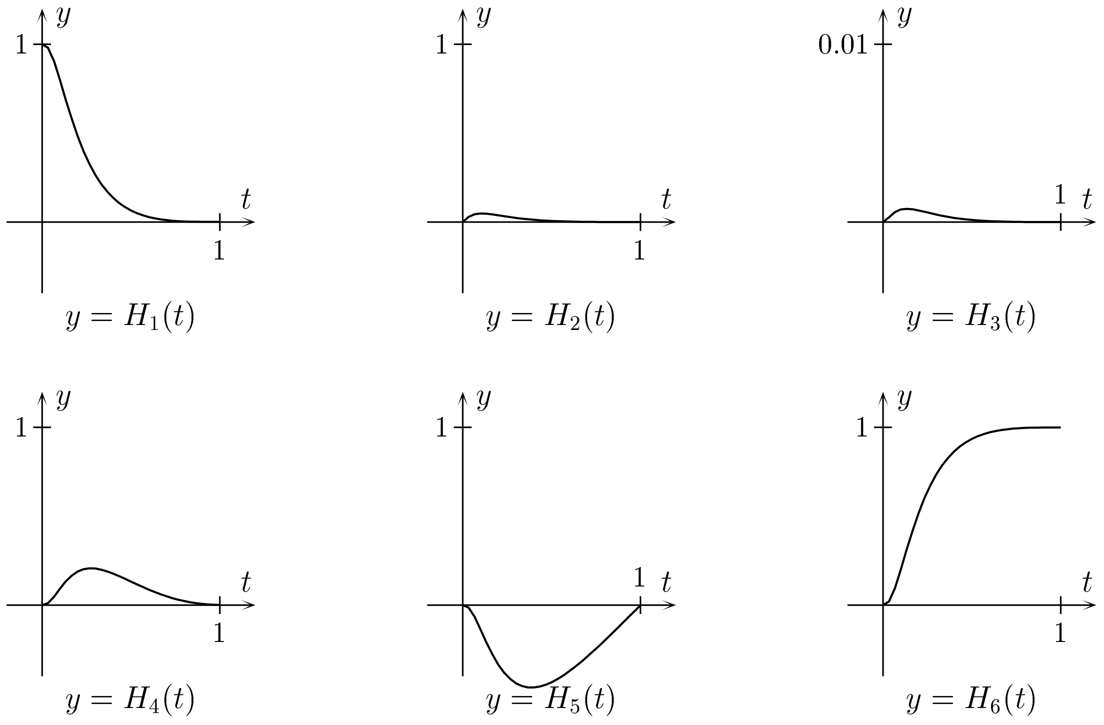

Рис. 10. Логарифмические смешивающие функции, $n = 6$

7°. Тригонометрические смешивающие функции.

Случай $n = 4$. Пусть $\gamma_1(t) = 1$, $\gamma_2(t) = \sin\alpha t$, $\gamma_3(t) = \cos\alpha t$, $\gamma_4(t) = \sin^2\alpha t$, где $\alpha \in (0, \pi)$. В [3] были найдены смешивающие функции, являющиеся линейными комбинациями функций $\gamma_k(t)$:

$$H_1(t) = \frac{(\cos\alpha - \cos\alpha t)^2}{(1-\cos\alpha)^2},$$

$$H_2(t) = \frac{\sin\alpha t - \sin\alpha}{\alpha} + \frac{(\cos\alpha - \cos\alpha t)\,(\cos^2\alpha - \cos\alpha t)}{\alpha\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)},$$

$$H_3(t) = \frac{(1-\cos\alpha t)\,(\cos\alpha - \cos\alpha t)}{\alpha\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)},$$

$$H_4(t) = 1 - \frac{(\cos\alpha - \cos\alpha t)^2}{(1-\cos\alpha)^2}.$$

На рис. 11 показаны графики функций $H_j(t)$ при $\alpha = \pi/2$.

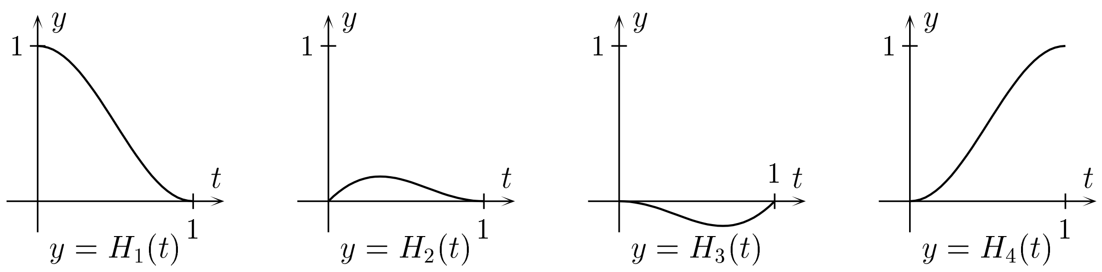

Рис. 11. Тригонометрические смешивающие функции, $n = 4$, $\alpha = \pi/2$

ПРИМЕР 1. Построим по формуле (3) кривую $r(t)$, удовлетворяющую условиям

$$r(0) = 0.7, \quad r'(0) = 1, \quad r'(1) = 2, \quad r(1) = 0.2,$$

используя различные наборы смешивающих функций. На рис. 12 показаны полученные кривые:

$r_1(t)$ — для полиномиальных смешивающих функций,

$r_2(t)$ — для экспоненциальных смешивающих функций с параметром $q = 3$,

$r_3(t)$ — для экспоненциальных смешивающих функций с параметром $q = 10$,

$r_4(t)$ — для дробно-рациональных смешивающих функций с набором параметров $c = (-2,\ -1,\ 0,\ 0.5)$,

$r_5(t)$ — для логарифмических смешивающих функций с набором параметров $c = (1,\, 2,\, 3)$,

$r_6(t)$ — для тригонометрических смешивающих функций.

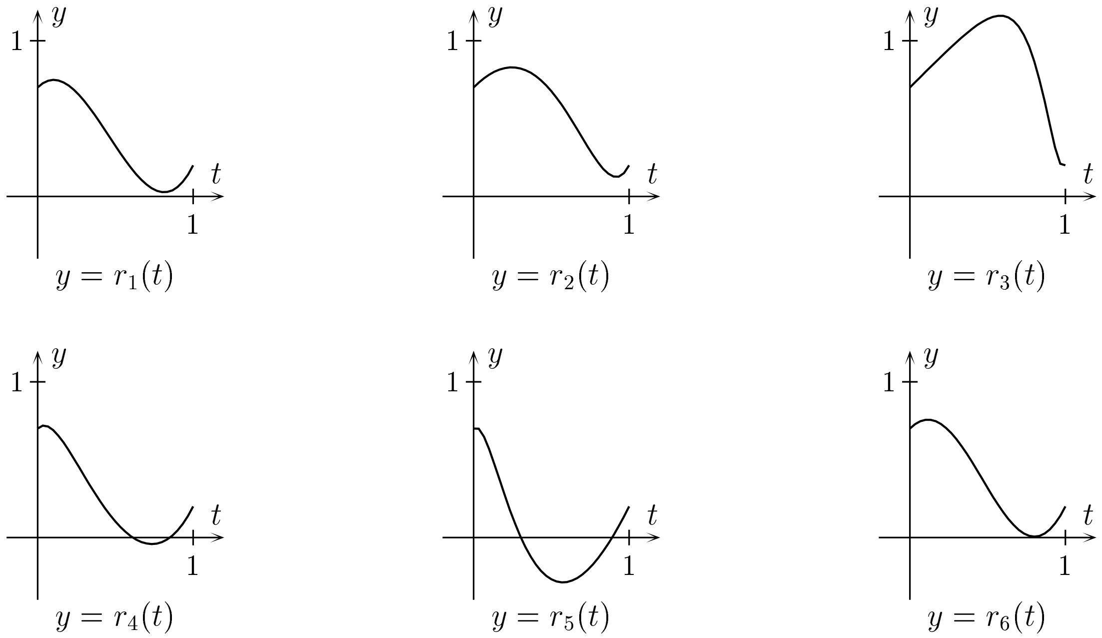

Рис. 12. Построение кривой при помощи различных смешивающих функций

ПРИМЕР 2. Построим параметрическую поверхность Кунса $s(u, v)$ по граничным условиям

$$f_1(v) = \tfrac{1}{3}\,(v-1)\,(4v-3)\,(v+1/4), \qquad f_2(v) = \tfrac{1}{12}\,(5-10v),$$

$$f_3(v) = \tfrac{1}{12}\,(5-10v), \qquad f_4(v) = \tfrac{1}{3}\,v\,(1-4v)\,(5/4-v),$$

$$g_1(v) = \tfrac{1}{3}\,(u-1)\,(4u-3)\,(u+1/4), \qquad g_2(u) = \tfrac{1}{12}\,(5-10u),$$

$$g_3(u) = \tfrac{1}{12}\,(5-10u), \qquad g_4(v) = \tfrac{1}{3}\,u\,(1-4u)\,(5/4-u),$$

используя различные наборы смешивающих функций. На рисунке рис. 13 изображены полученные поверхности:

$s_1(u, v)$ — для полиномиальных смешивающих функций,

$s_2(u, v)$ — для экспоненциальных смешивающих функций с параметром $q = 10$,

$s_3(u, v)$ — для дробно-рациональных смешивающих функций с набором параметров $c = (-8,\ -5,\ -2,\ 0.75)$,

$s_4(u, v)$ — для логарифмических смешивающих функций с набором параметров $c = (1,\ 2,\ 3)$.

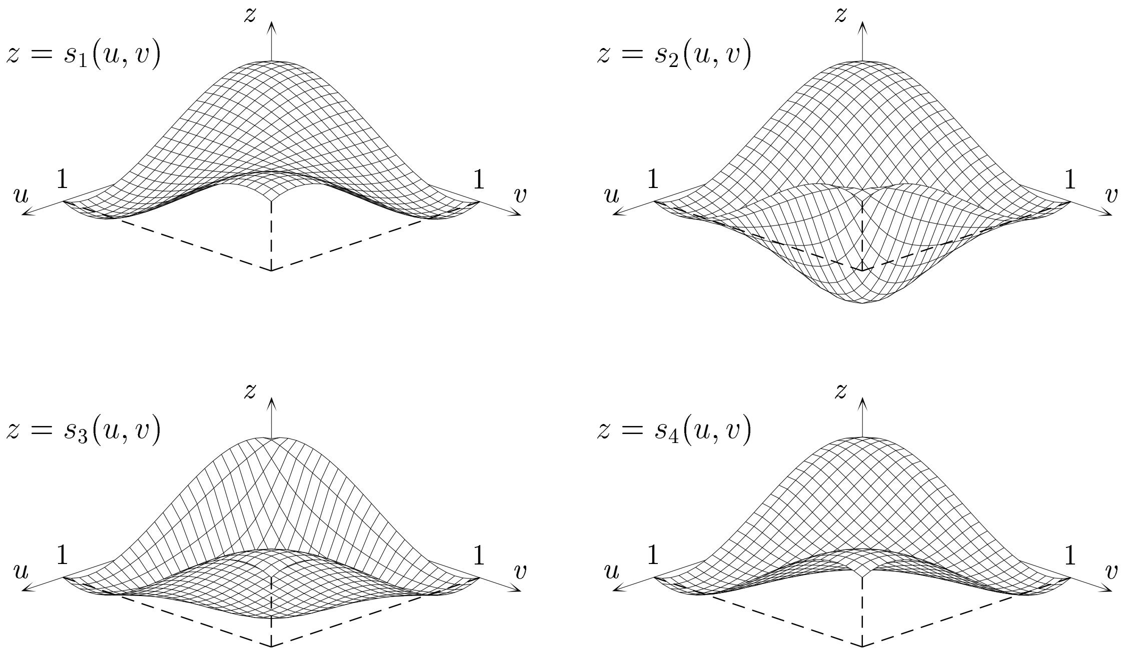

Рис. 13. Поверхности Кунса

ЛИТЕРАТУРА

1. Арайкина М. И. *Построение параметрических гамма-кривых и поверхностей* // Дипломная работа. Научн. рук. доц. А. А. Васильев. Сыктывкарский гос. университет, 2006.

2. Малозёмов В. Н., Чашников Н. В. *Бикубические поверхности Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 23 января 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0123`)

3. Чашников Н. В. *Поверхность вращения как поверхность Кунса* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 28 августа 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0828`)